Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía

Examen final de Matemáticas II. Mayo de 2016.

---

(1) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$

$$\left\{ \begin{array}{lcc} ax + y + z & = & b \\ x + ay + z & = & 1 \\ x + (2a-1)y + z & = & 2 - b \end{array} \right.$$

se pide:

(a) Clasifique el sistema según los valores de a y de b. **1 punto**

(b) Resuelva el sistema anterior para los valores $a = b = 1$. **1 punto**

---

(2) Considere la función $f(x, y) = x - y$ y el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq \sqrt{x}, 0 \leq x \leq 4\}$.

(a) Represente gráficamente el conjunto A, su frontera, clausura e interior. Justifique (sin necesidad de calcularlos) si la función f alcanza un máximo y/o un mínimo globales en el conjunto A. **1 punto**

(b) Con la ayuda de las curvas de nivel de la función f, calcule los puntos extremos globales del apartado anterior. **1 punto**

---

(3) Considere la función

$$f(x, y) = \left\{ \begin{array}{cl} \frac{xy}{x^2+y^2} e^{xy} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{array} \right.$$

(a) Calcule las derivadas parciales de f en el punto $(0, 0)$. **1 punto**

(b) Compruebe si f es continua y/o diferenciable en el punto $(0, 0)$. **1 punto**

---

(4) Un agente tiene una función de utilidad $f(x, y, z) = \ln x + 2 \ln y + 3 \ln z$. El agente elige la cesta $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que maximiza su función de utilidad $f(x, y, z)$ sobre la recta presupuestaria $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 90, x > 0, y > 0, z > 0\}$.

(a) Halle las ecuaciones de Lagrange que determinan los extremos de f en el conjunto A. Obtenga los puntos que satisfacen las citadas ecuaciones y el valor del multiplicador de Lagrange correspondiente a cada uno de los puntos. **1 punto**

(b) Caracterice las soluciones del apartado anterior en máximos y mínimos locales, utilizando las condiciones de segundo orden para óptimos locales. ¿Se puede afirmar que alguno de los máximos o mínimos es global en el conjunto A? Justifique adecuadamente las respuestas. **1 punto**

---

(5) Considere la función $f(x, y) = 10 - 8x + 2x^2 + 8y - 4xy + bx^2y + 2y^2$ con $b > 2$.

(a) Determine los puntos críticos (si existen) de la función f en el conjunto $\mathbb{R}^2$. **1 punto**

(b) Clasifique los puntos críticos del apartado anterior en máximos, mínimos (locales y globales) y puntos de silla, dependiendo de los valores del parámetro b. **1 punto**