Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía

Examen final de Matemáticas II. Mayo de 2016.

---

(1) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} ax + y + z & = & b \\ x + ay + z & = & 1 \\ x + (2a-1)y + z & = & 2-b \end{cases}$$

se pide:

(a) Clasifique el sistema según los valores de a y de b. **1 punto**

Solución: *Tras operaciones elementales con filas se obtiene que el sistema propuesto es equivalente al sistema de ecuaciones lineales cuya matriz ampliada es*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 0 & -1+b \\ 0 & 0 & 1-a & 1-ab \end{pmatrix}$$

Deducimos que si $a \neq 1$ el sistema es compatible determinado. Supongamos que $a = 1$. El sistema propuesto es equivalente al sistema de ecuaciones lineales cuya matriz ampliada es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1+b \\ 0 & 0 & 0 & 1-b \end{pmatrix}$$

Si $b \neq 1$ el sistema es incompatible y si $b = 1$ el sistema es compatible con dos parámetros.

(b) Resuelva el sistema anterior para los valores $a = b = 1$. **1 punto**

Solución: *El sistema propuesto es equivalente al siguiente sistema de ecuaciones lineales*

$$x + y + z = 1$$

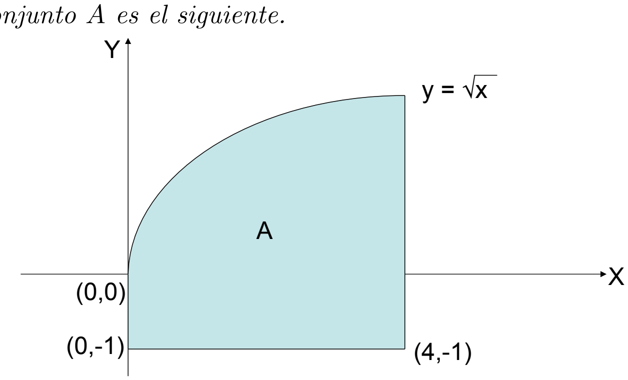
Eligiendo x, y como parámetros el conjunto de soluciones es $\{(x, y, 1-x-y) : x, y \in \mathbb{R}\}$.

---

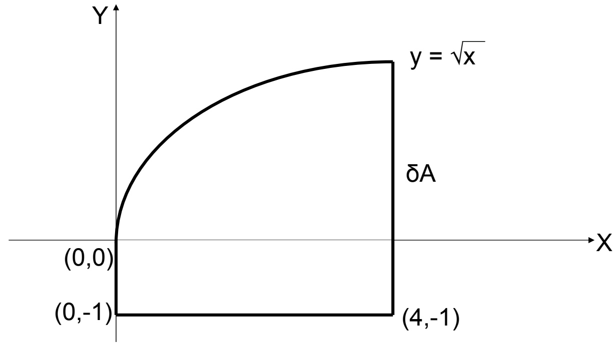
(2) Considere la función $f(x,y) = x - y$ y el conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq \sqrt{x}, 0 \leq x \leq 4\}$.

(a) Represente gráficamente el conjunto A, su frontera, clausura e interior. Justifique (sin necesidad de calcularlos) si la función f alcanza un máximo y/o un mínimo globales en el conjunto A. **1 punto**

Solución: *El conjunto A es el siguiente.*



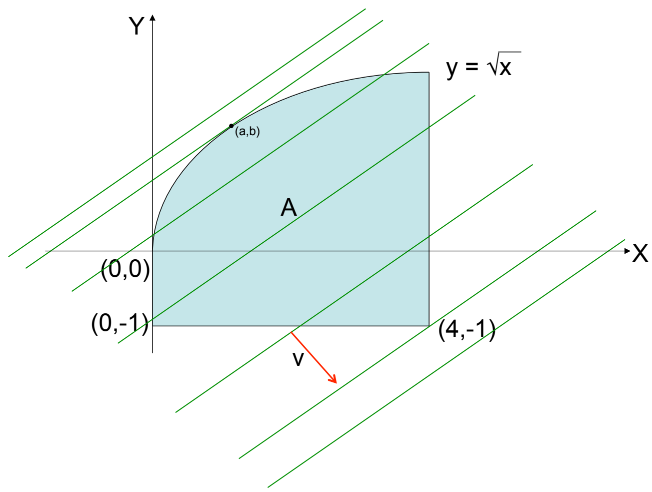
Su frontera.



Como el conjunto A contiene a su frontera, es cerrado. Además es acotado, por lo que el conjunto A es compacto. Como la función f es continua, por el teorema de Weierstrass, alcanza los valores máximo y mínimo en el conjunto A.

(b) Con la ayuda de las curvas de nivel de la función f, calcule los puntos extremos globales del apartado anterior. $\boxed{\textbf{1 punto}}$

Solución: *Las curvas de nivel de f coinciden con las gráficas de las funciones $y = x - C$ con $C \in \mathbb{R}$. Gráficamente*



El vector v indica la dirección de crecimiento de f. Vemos que el valor máximo es 5 y se alcanza en en el punto $(4, -1)$. El valor mínimo se alcanza en el punto (a, b) de tangencia entre la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ y la recta $g(x) = x - C$ para algún valor $C \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, debe verificarse que $f'(a) = g'(a)$, es decir

$$\frac{1}{2\sqrt{a}} = 1$$

por lo tanto $a = 1/4$, $b = f(a) = 1/2$. El valor mínimo de f en A es $a - b = -1/4$.

---

(3) Considere la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} e^{xy} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Calcule las derivadas parciales de f en el punto $(0,0)$. $\boxed{\textbf{1 punto}}$

Solución: *Las derivadas parciales de f en el punto $(0,0)$ son*

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{0\cdot t\cdot e^0}{t(0+t^2)} == \lim_{t\to 0}\frac{0}{t^3}=0\\
\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{t\cdot 0\cdot e^0}{t(t^2+0)} = \lim_{t\to 0}\frac{0}{t^3}=0
\end{aligned}
$$

(b) Compruebe si f es continua y/o diferenciable en el punto $(0,0)$. **1 punto**

Solución: *Utilizando la curva $\alpha(t)=(t,t)$ vemos que*

$$\lim_{t\to 0} f(\alpha(t) = \lim_{t\to 0}\frac{t^2}{2t^2}e^{t^2} = \frac{1}{2}$$

Mientras que utilizando la curva $\sigma(t)=(t,t^2)$ vemos que

$$\lim_{t\to 0} f(\sigma(t) = \lim_{t\to 0}\frac{t^3}{t^2+t^4}e^{t^3} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{1+t}e^{t^3}=0$$

por lo que la función no es continua en el punto $(0,0)$.
Como no es continua en el punto $(0,0)$, tampoco es diferenciable en ese punto.

---

(4) Un agente tiene una función de utilidad $f(x,y,z) = \ln x + 2\ln y + 3\ln z$. El agente elige la cesta $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ que maximiza su función de utilidad $f(x,y,z)$ sobre la recta presupuestaria $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+2y+3z=90, x>0, y>0, z>0\}$.

(a) Halle las ecuaciones de Lagrange que determinan los extremos de f en el conjunto A. Obtenga los puntos que satisfacen las citadas ecuaciones y el valor del multiplicador de Lagrange correspondiente a cada uno de los puntos. **1 punto**

Solución: *El lagrangiano es $L=\ln x+2\ln y+3\ln z+\lambda(90-x-2y-3z)$. Obtenemos las ecuaciones de Lagrange:*

$$\frac{1}{x}-l=0, \frac{2}{y}-2l=0, \frac{3}{z}-3l=0, x+2y+3z=90$$

Las soluciones son $x=y=z=15$, $l=1/15$.

(b) Caracterice las soluciones del apartado anterior en máximos y mínimos locales, utilizando las condiciones de segundo orden para óptimos locales. ¿Se puede afirmar que alguno de los máximos o mínimos es global en el conjunto A? Justifique adecuadamente las respuestas. **1 punto**

Solución: *La matriz Hessiana es*

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{x^2} & 0 & 0\\ 0 & -\frac{2}{y^2} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{3}{z^2}\end{pmatrix}$$

que claramente es definida negativa en el conjunto A. El conjunto A es abierto y convexo y la función f es convexa en A porque su matriz Hessiana es definida negativa en ese conjunto. Por lo tanto, el punto obtenido en el apartado anterior es un máximo global de f en A.

---

(5) Considere la función $f(x,y)=10-8x+2x^2+8y-4xy+bx^2y+2y^2$ con $b>2$.

(a) Determine los puntos críticos (si existen) de la función f en el conjunto $\mathbb{R}^2$. **1 punto**

Solución: *El gradiente de f es*

$$\big(2bxy+4x-4y-8, bx^2-4x+4y+8\big)$$

las ecuaciones que definen los puntos críticos son

$$\begin{aligned} 0 &= 2bxy + 4x - 4y - 8 \\ 0 &= bx^2 - 4x + 4y + 8 \end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que $bx(x + 2y) = 0$. *Una solución es* $x = 0$, $y = -2$. *Si* $x \neq 0$, *entonces* $x = -2y$. *Sustituyendo este valor en la segunda ecuación obtenemos la ecuación* $4by^2 + 12y + 8 = 0$ *cuyo discriminante es* $9 - 8b < 0$ *por lo que esta ecuación no tiene soluciones reales. La única solución es* $x = 0$, $y = -2$.

(b) Clasifique los puntos críticos del apartado anterior en máximos, mínimos (locales y globales) y puntos de silla, dependiendo de los valores del parámetro b. $\boxed{\textbf{1 punto}}$

Solución: *La matriz Hessiana es*

$$\begin{pmatrix} 2by + 4 & 2bx - 4 \\ 2bx - 4 & 4 \end{pmatrix}$$

que calculada en el punto $x = 0$, $y = -2$ *es*

$$H = \begin{pmatrix} 4 - 4b & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

Obtenemos $D_1 = 4 - 4b < 0$, $D_2 = -16b < 0$. *Por lo tanto* H *es indefinida y el punto* $x = 0$, $y = -2$ *es un punto de silla. No hay ni máximos ni mínimos, locales o globales.*