$\boxed{1}$

Dado el parámetro $a \in \mathbb{R}$, se considera el sistema lineal

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} x & +y & -z & = & 1 \\ x & -y & +z & = & 7 \\ -x & +y & +z & = & 3 \\ 2x & +ay & -4z & = & a \end{array}\right.$$

(a) (6 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro a.

(b) (4 puntos) Resolver el sistema para el caso en que el sistema es compatible determinado.

Solución:

(a) Realizamos transformaciones elementales sobre la matriz ampliada del sistema

$$A^* = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 7 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & a & -4 & a \end{array}\right),$$

hasta encontrar la matriz escalonada equivalente.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 7 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & a & -4 & a \end{array}\right) \underset{\sim}{\overset{f_2-f_1}{\overset{f_3+f_1}{f_4-2f_1}}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & a-2 & -2 & a-2 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{\overset{f_3+f_2}{2f_4+(a-2)f_2}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 2(a-4) & 8(a-2) \end{array}\right) \underset{\sim}{f_4-(a-4)f_3} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -2a+24 \end{array}\right).$$

Por tanto, tenemos:

- Si $a = 12$, entonces $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3$, y el sistema es compatible determinado.
- En otro caso, si $a \neq 12$, entonces $\text{rango}(A) = 3 \neq 4 = \text{rango}(A^*)$, y el sistema es incompatible

(b) Tomando $a = 12$, el sistema escalonado equivalente es

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x & +y & -z & = & 1 \\ & -2y & +2z & = & 6 \\ & & 2z & = & 10 \end{array}\right. .$$

La solución es $(x = 4, y = 2, z = 5)$.

$\boxed{2}$

Se considera el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \geq x^2 - 2x,\ y \leq 2x - x^2\}$ y la función $f(x, y) = x + y$.

(a) (4 puntos) Representar gráficamente el conjunto A. Demostrar que la función f alcanza máximo y mínimo absolutos en dicho conjunto.

(b) (6 puntos) Con la ayuda de las curvas de nivel de la función f, indicar dónde se alcanzan los extremos absolutos del apartado anterior y hallar su valor.

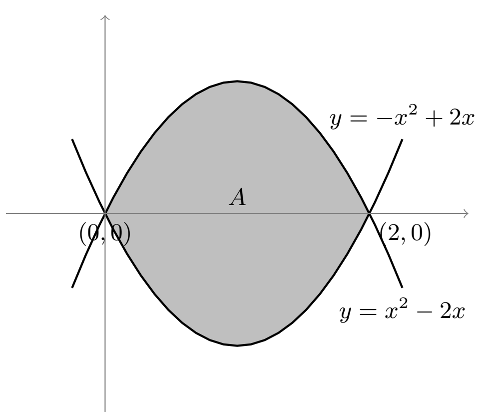
Solución:

(a) El conjunto A es la región sombreada de la figura.

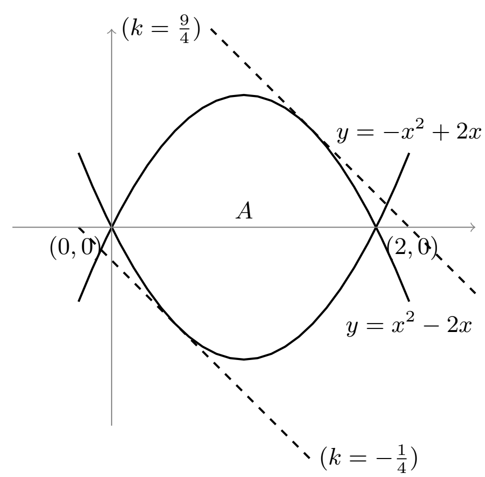
El conjunto A es cerrado, pues contiene a todos sus puntos frontera y es acotado, ya que está contenido en la bola cerrada de centro el origen de coordenadas y radio 2. Por tanto, se trata de un conjunto compacto. Ver la representación del conjunto más abajo. La función es continua en todo $\mathbb{R}^2$, ya que es una función lineal. Luego f es continua en A. Por el Teorema de Weierstrass, la función alcanza extremos absolutos en A.

(b) Las curvas de nivel son de la forma $x + y = k$, es decir, son rectas con pendiente -1. El sentido de crecimiento de las curvas de nivel es $(1, 1)$. Por tanto, el mínimo (máximo) absoluto de f en A se alcanza en el punto de tangencia de la curva de nivel más alejada hacia la izquierda (derecha) del origen de coordenadas con dicho conjunto. La frontera inferior del conjunto A está dada por $y = x^2 - 2x$, cuya derivada es $y' = 2x - 2$. La derivada en el punto de tangencia debe coincidir con la pendiente de la recta de nivel, que es -1. El punto de tangencia se obtiene al igualar $2x - 2 = -1$, es decir, $x = \frac{1}{2}$. La coordenada y es $y = (\frac{1}{2})^2 - 2\frac{1}{2} = -\frac{3}{4}$. Luego el mínimo absoluto es $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4})$ y el valor mínimo de f en A es $-\frac{1}{4}$. Con un razonamiento análogo sobre la frontera superior de A, dada por $y = x^2 - 2x$, se obtiene que el máximo absoluto es $(\frac{3}{2}, \frac{3}{4})$ y el valor máximo de f en A es $\frac{9}{4}$.

Conjunto



Curvas de nivel



$\boxed{3}$

Dado $a \in \mathbb{R}$, se considera la función $f(x,y,z) = ax^2 + ay^2 - 6x - z + (a-1)z^4$.

(a) (5 puntos) Estudiar la concavidad y la convexidad de f según los valores del parámetro a.

(b) (5 puntos) Para $a = 3$, hallar los extremos locales y globales de f en caso de que existan.

Solución:

(a) La función f es de clase C^2 en $\mathbb{R}^2$ ya que es polinómica. El gradiente de f es

$$\nabla f(x,y,z) = (2ax - 6, 2ay, -1 + 4(a-1)z^3).$$

La matriz Hessiana de f es

$$\begin{pmatrix} 2a & 0 & 0 \\ 0 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & 12(a-1)z^2 \end{pmatrix}$$

que es una matriz diagonal y, por tanto, es muy sencillo estudiar su signo. Los elementos diagonales son $2a$ y $12(a-1)z^2$.

- Si $a \geq 1$, entonces $2a > 0$ y $12(a-1)z^2 \geq 0$ para todo z. Por tanto, la matriz Hessiana es semidefinida positiva para todo z y f es convexa.
- Si $0 < a < 1$, entonces $2a > 0$ y $12(a-1)z^2 < 0$ para todo $z \neq 0$. Por tanto, la matriz Hessiana es indefinida y f no es ni cóncava ni convexa.
- Si $a \leq 0$, entonces $2a \leq 0$ y $12(a-1)z^2 \leq 0$ para todo z. Por tanto, la matriz Hessiana es semidefinida negativa para todo z y f es cóncava.

(b) Los puntos críticos verifican el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcl} 6x - 6 & = & 0 \\ 6y & = & 0 \\ -1 + 8z^3 & = & 0 \end{array}\right\},$$

cuya solución es $(1, 0, \frac{1}{2})$. Dado que estamos en el caso $a \geq 1$, f es convexa, por lo que se trata de un mínimo global y por tanto local.

$\boxed{4}$

Se considera el problema de optimizar la función $f(x,y) = x^2 + y^2 + 3xy$ en el conjunto $A = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$.

(a) (4 puntos) Obtener las ecuaciones de Lagrange del problema.

(b) (6 puntos) Hallar los puntos críticos y clasificarlos.

Solución:

(a) El conjunto A es compacto y la función f es continua y diferenciable. Por tanto, f alcanza extremos globales en A. La función Lagrangiana del problema es

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + 3xy + \lambda(1 - x^2 - y^2)$$

y las ecuaciones de Lagrange son

$$\begin{cases} 2x + 3y - 2\lambda x &= 0 \\ 2y + 3x - 2\lambda y &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{cases}$$

(b) Dado que $(0,0)$ no satisface la restricción, el sistema lineal homogéneo

$$\begin{cases} 2(1-\lambda)x + 3y &= 0 \\ 3x + 2(1-\lambda)y &= 0 \end{cases},$$

cuyo determinante es $4(1-\lambda)^2 - 9 = 0$, es compatible si y sólo si $\lambda = -\frac{1}{2}$ o $\lambda = \frac{5}{2}$. A estos valores del multiplicador corresponden los puntos $y = -x$ y $y = x$, respectivamente. Al substituir en la restricción encontramos los candidatos

$$P_1 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}),\ P_2 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}),\ P_3 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}),\ P_4 = (-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}).$$

El valor de f es $-\frac{1}{2}$ en P_1 y P_2 y $\frac{5}{2}$ en P_3 y P_4, por lo que P_1, P_2 son mínimos globales y P_3, P_4 son máximos globales.

$\boxed{5}$

Se considera el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcl} xy + 2yz + zt^2 & = & 5 \\ x^2z + y^2t & = & 4 \end{array}\right\}.$$

(a) (4 puntos) Justificar si puede aplicarse el Teorema de la Función Implícita en el punto $P = (x_0, y_0, z_0, t_0) = (2, 1, \frac{1}{2}, 2)$ para garantizar que el sistema anterior define a z y t como funciones de x e y en un entorno de P.

(b) (6 puntos) Calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}(2,1)$ y $\dfrac{\partial t}{\partial x}(2,1)$.

Solución:

(a) Comprobamos que se satisfacen las hipótesis del Teorema de la Función Implícita. Denotamos $f_1(x,y,z,t) := xy + 2yz + zt^2 - 5$ y $f_2(x,y,z,t) := x^2z + y^2t - 4$. Tenemos

- $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^1$ ya que ambas funciones son polinomios
- $f_1(2,1,\frac{1}{2},2) = f_2(2,1,\frac{1}{2},2) = 0$, dado que

$$\left.\begin{array}{rcl} 2\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot 2^2 & = & 5 \\ 2^2\cdot\frac{1}{2} + 1^2\cdot 2 & = & 4 \end{array}\right\}$$

- Por otra parte,

$$\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(z,t)}(2,1,\frac{1}{2},2) = \left|\begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial z} & \frac{\partial f_1}{\partial t} \\ \frac{\partial f_2}{\partial z} & \frac{\partial f_2}{\partial t} \end{matrix}\right|_{(2,1,\frac{1}{2},2)} = \left|\begin{matrix} 2y+t^2 & 2zt \\ x^2 & y^2 \end{matrix}\right|_{(2,1,\frac{1}{2},2)} = \left|\begin{matrix} 6 & 2 \\ 4 & 1 \end{matrix}\right| = -2 \neq 0.$$

Luego el sistema anterior define a las variables z y t como funciones diferenciables de x y y en un entorno del punto $(2,1,\frac{1}{2},2)$, y además $z(2,1) = \frac{1}{2}$ y $t(2,1) = 2$.

(b) En primer lugar derivamos el sistema original con respecto a x.

$$\left.\begin{array}{rcl} y + 2y\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x}t^2 + z2t\frac{\partial t}{\partial x} & = & 0 \\ 2xz + x^2\frac{\partial z}{\partial x} + y^2\frac{\partial t}{\partial x} & = & 0 \end{array}\right\}$$

Ahora, substituimos $(2,1,\frac{1}{2},2)$ para obtener el sistema lineal

$$\left.\begin{array}{rcl} 1 + 6\frac{\partial z}{\partial x}(2,1) + 2\frac{\partial t}{\partial x}(2,1) & = & 0 \\ 2 + 4\frac{\partial z}{\partial x}(2,1) + \frac{\partial t}{\partial x}(2,1) & = & 0 \end{array}\right\}$$

cuya solución es $\frac{\partial z}{\partial x}(2,1) = -\frac{3}{2}$ y $\frac{\partial t}{\partial x}(2,1) = 4$.

$\boxed{6}$

Se considera la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y - y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{if } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) (4 puntos) Estudiar la continuidad de f.

(b) (6 puntos) Calcular las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

y la derivada direccional de f en $(1,1)$ en la dirección $(4/5, 3/5)$.

Solución:

(a) Si calculamos los límites iterados, ambos son iguales a 0. Si nos aproximamos al $(0,0)$ mediante cualquier curva (polinómica), el límite de la función también es 0. Vamos pues a probar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y - y^3}{x^2+y^2} = 0. \tag{1}$$

Sea $\varepsilon > 0$. Entonces

$$\left|\frac{x^2y - y^3}{x^2+y^2} - 0\right| = \left|\frac{x^2y - y^3}{x^2+y^2}\right| = |y| \cdot \left|\frac{x^2 - y^2}{x^2+y^2}\right| \leq |y| \leq \sqrt{x^2+y^2} < \delta = \varepsilon$$

para todo $(x,y) \in B((0,0),\delta)$. Tomando $\delta = \varepsilon$, se cumple (1). Por tanto, f es continua en $\mathbb{R}^2$.

(b) El gradiente de f en $(0,0)$ es

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(1,0)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(0,1)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{-t}{t} = -1.$$

Luego $\nabla f(0,0) = (0,-1)$.

Finalmente, vamos a calcular la derivada direccional. Para $(x,y) \neq (0,0)$ tenemos

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \left(\frac{4xy^3}{(x^2+y^2)^2}, \frac{x^4 - 4x^2y^2 - y^4}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

Las derivadas parciales son funciones continuas en el abierto S y, por tanto, f es diferenciable en S y en particular en el punto $(1,1)$. En consecuencia, para calcular la derivada direccional podemos usar la fórmula $D_{(v_1,v_2)}f(x_0,y_0) = (v_1,v_2)\cdot\nabla f(x_0,y_0)$. Tenemos

$$D_{(\frac{4}{5},\frac{3}{5})}f(1,1) = (\tfrac{4}{5},\tfrac{3}{5})\cdot\nabla f(1,1) = (\tfrac{4}{5},\tfrac{3}{5})\cdot(1,-1) = \frac{4}{5} - \frac{3}{5} = \frac{1}{5}.$$