

1

Dado el parámetro $a \in \mathbb{R}$, se considera el sistema lineal

$$\begin{cases} x + 3y - 2t = -1 \\ 2x + y + z + t = -2 \\ 3x - y + z - t = 7 \\ 2x + 6y + z + t = a \end{cases}$$

- (a) (6 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro a .
(b) (4 puntos) Resolver el sistema cuando sea posible.

Solución:

- (a) Realizamos transformaciones elementales sobre la matriz ampliada del sistema

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 7 \\ 2 & 6 & 1 & 1 & a \end{array} \right),$$

hasta encontrar la matriz escalonada equivalente.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 7 \\ 2 & 6 & 1 & 1 & a \end{array} \right) \xrightarrow[f_4 - 2f_1]{f_2 - 2f_1, f_3 - 3f_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & -10 & 1 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & a+2 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{f_3 - 2f_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & a+2 \end{array} \right) \xrightarrow{f_4 + f_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+12 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Así, tenemos dos casos:

- Si la última fila es igual a 0, lo que sucede cuando $a = -12$, se cumple que el rango de la matriz del sistema coincide con el de la ampliada y es igual a 3, por lo que el sistema es compatible indeterminado.
- Si la última fila es distinta de 0, lo que sucede cuando $a \neq -12$, se cumple que el rango de la matriz del sistema es 3, menor que el rango de la ampliada que es 4 y el sistema será incompatible.

- (b) El sistema escalonado equivalente es

$$\begin{cases} x + 3y = -1 + 2t \\ -5y + z = -5t \\ -z = 10 + 5t \end{cases}.$$

Tomando $t = \lambda$ como parámetro las soluciones serán $(x = 5 + 2\lambda, y = -2, z = -10 - 5\lambda, t = \lambda)$.

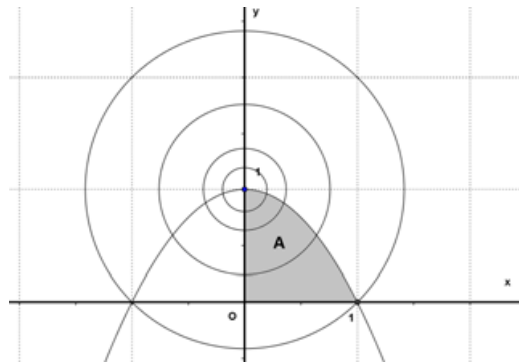
2

Se considera el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 1 - x^2, x \geq 0, y \geq 0\}$ y la función $f(x, y) = x^2 + (y - 1)^2$.

- (a) (5 puntos) Representar gráficamente el conjunto A y demostrar que la función f alcanza máximo y mínimo absolutos en dicho conjunto.
- (b) (5 puntos) Con la ayuda de las curvas de nivel de la función f , indicar dónde se alcanzan los extremos absolutos del apartado anterior y hallar su valor.

Solución:

- (a) El conjunto A es la región sombreada de la figura.



El conjunto A es cerrado, pues contiene a todos sus puntos frontera y es acotado, ya que está contenido en la bola de centro el origen de coordenadas y radio 2. Por tanto, se trata de un conjunto compacto. La función es continua en todo $\mathbb{R}^2$, ya que es una función polinómica. Luego f es continua en A . Por el Teorema de Weierstrass, la función alcanza extremos absolutos en A .

- (b) Las curvas de nivel son de la forma $x^2 + (y - 1)^2 = k$, con $k \geq 0$, es decir, son circunferencias de centro el punto $(0, 1)$ y radio $\sqrt{k}$. El sentido de crecimiento de las curvas de nivel coincide con el crecimiento del radio de las circunferencias. Por tanto, el mínimo absoluto de f en A se alcanza en el punto $(0, 1)$ y $f(0, 1) = 0$. El máximo absoluto de f en A se alcanza en $(1, 0)$ y $f(1, 0) = 2$.

3

Dado $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, se considera la función $f(x, y) = x^4 - 2ax^2 - y^2 + 3$.

- (a) (4 puntos) Hallar los puntos críticos de f según los valores de $a \neq 0$.
(b) (6 puntos) Discutir si dichos puntos críticos son máximos o mínimos locales de f , según los valores de $a \neq 0$.

Solución:

- (a) La función f es de clase C^2 en $\mathbb{R}^2$ ya que es polinómica. El gradiente de f es

$$\nabla f(x, y) = (4x^3 - 4ax, -2y).$$

Los puntos críticos son las soluciones del sistema de ecuaciones $4x^3 - 4ax = 0$, $-2y = 0$, de donde obtenemos $(0, 0)$, cualquiera que sea el valor de a y dos puntos crítico adicionales $(\pm\sqrt{a}, 0)$ si $a > 0$. Es decir,

- Si $a > 0$, los puntos críticos son $(0, 0)$, $(\sqrt{a}, 0)$ y $(-\sqrt{a}, 0)$.
- Si $a < 0$, $(0, 0)$ es el único punto crítico.

- (b) Estudiaremos si los puntos críticos son extremos mediante la matriz Hessiana de f

$$\mathcal{H}f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4a & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Observamos que la matriz es diagonal, por lo que sus valores propios son los elementos de la diagonal. Utilizaremos este hecho par estudiar el signo de la forma cuadrática.

Caso i) $a > 0$. Tenemos tres puntos que considerar. Las correspondientes matrices Hessianas son

$$\mathcal{H}f(0, 0) = \begin{pmatrix} -4a & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H}f(\sqrt{a}, 0) = \begin{pmatrix} 8a & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H}f(-\sqrt{a}, 0) = \begin{pmatrix} 8a & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

La primera matriz es definida negativa ya que $a > 0$, luego $(0, 0)$ es un máximo local de f . En los dos casos restantes la matriz es indefinida, por lo que ambos puntos críticos, $(\pm\sqrt{a}, 0)$ son puntos de silla de f .

Caso ii) $a < 0$. La matriz Hessiana es como antes,

$$\mathcal{H}f(0, 0) = \begin{pmatrix} -4a & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

pero ahora es indefinida, ya que $a < 0$. Por tanto, en este caso $(0, 0)$ es un punto de silla de f .

4

Una empresa fabrica un único bien utilizando mano de obra y maquinaria. La función de producción es $F(x, y) = 60x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$, donde x representa el gasto en miles de euros en mano de obra y y el gasto en miles de euros en maquinaria.

- (a) (4 puntos) Estudiar si F es una función cóncava o convexa en el conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}.$$

- (b) (6 puntos) Suponiendo que la empresa dispone de un presupuesto de 120 (miles de euros) y desea producir el mayor número de unidades posibles del bien, hallar las condiciones necesarias de Lagrange para el problema.

Solución:

- (a) Claramente, A es un conjunto convexo, por ser la intersección de dos semiplanos abiertos, que son convexos. La función F es de clase C^2 en el conjunto A . El gradiente de F es $\nabla F(x, y) = (20x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}, 40x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}})$ y la matriz Hessiana de F es

$$\mathcal{H}F(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{40}{3}x^{-\frac{5}{3}}y^{\frac{2}{3}} & \frac{40}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{3}} \\ \frac{40}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{3}} & -\frac{40}{3}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{4}{3}} \end{pmatrix}.$$

El primer menor principal es $-\frac{40}{3}x^{-\frac{5}{3}}y^{\frac{2}{3}}$, negativo para todo $(x, y) \in A$. El segundo menor principal es el determinante, que vale

$$\left(\frac{40}{3}\right)^2 x^{-\frac{4}{3}}y^{-\frac{2}{3}} - \left(\frac{40}{3}\right)^2 x^{-\frac{4}{3}}y^{-\frac{2}{3}} = 0.$$

Luego, para todo $(x, y) \in A$, la forma cuadrática que define la matriz Hessiana es semidefinida negativa y, por tanto, F es cóncava.

- (b) La función Lagrangiana del problema es

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 60x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}} + \lambda(120 - x - y).$$

Los puntos críticos de $\mathcal{L}$ se obtienen al resolver el sistema $\nabla \mathcal{L} = \vec{0}$,

$$\begin{cases} 20x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}} - \lambda = 0 \\ 40x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}} - \lambda = 0 \\ x + y = 120 \end{cases}$$

Eliminando el multiplicador mediante las dos primeras ecuaciones, encontramos la relación $x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}} = 2x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}}$, es decir, $y = 2x$. Substituyendo en la tercera ecuación, encontramos el punto $(x^*, y^*) = (40, 80)$ con multiplicador asociado $\lambda^* = 20\sqrt[3]{4}$.

5

Se considera la ecuación $x^2y + e^{zx} = 1$.

- (a) (4 puntos) Indica en cuales de los siguientes puntos $p = (0, 1, 1)$ y $q = (1, 0, 0)$ puede aplicarse el Teorema de la Función Implícita para garantizar que dicha ecuación define a z como una función de x e y en un entorno de cada punto.
- (b) (6 puntos) Evalúa $\frac{\partial z}{\partial x}(x, y)$ y $\frac{\partial z}{\partial y}(x, y)$ en aquellos puntos del apartado anterior que satisficieran las hipótesis del Teorema de la Función Implícita.

Solución:

(a) Llamando $f(x, y, z) = x^2y + e^{zx} - 1$ a la función que define la ecuación tenemos que

- Al estar f definida por funciones elementales (polinómicas y exponencial) se satisface la condición de ser C^1
- Si sustituimos cada punto en la ecuación, esta se satisface para p y q .
- Calculando el determinante de la matriz (en este caso una matriz 1×1) de las derivadas parciales respecto de la variable dependiente obtenemos $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y) = e^{zx}x$ que evaluado en el punto p queda 0 por lo cual la hipótesis del teorema no se satisface. Pero si sustituimos como antes el punto q queda 1 que por ser distinto de cero, permite garantizar que sí se satisfacen las hipótesis del teorema en el punto q .

(b) Por el apartado anterior solo consideramos el punto q .

Derivando directamente respecto de x en la ecuación queda

$$2xy + e^{zx}\left(\frac{\partial z}{\partial x}(x, y)x + z\right) = 0$$

sustituyendo los valores $q = (1, 0, 0)$

$$2 \cdot 1 \cdot 0 + e^{0 \cdot 1}\left(\frac{\partial z}{\partial x}(1, 0) \cdot 1 + 0\right) = 0$$

y despejando $\frac{\partial z}{\partial x}(1, 0) = 0$

Al derivar ahora respecto de y en la ecuación obtenemos

$$x^2 + e^{zx}\left(\frac{\partial z}{\partial y}(x, y)x\right) = 0$$

sustituyendo los valores $q = (1, 0, 0)$

$$1^2 + e^{0 \cdot 1}\left(\frac{\partial z}{\partial y}(1, 0) \cdot 1\right) = 0$$

y despejando $\frac{\partial z}{\partial y}(1, 0) = -1$.

6

Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (a) (5 puntos) Estudiar la continuidad de f en $(0, 0)$.
(b) (5 puntos) Calcular las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$$

y la derivada direccional de f en $(0, 0)$ en la dirección $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $D_{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})}f(0, 0)$.

Solución:

- (a) Calculando los límites a través de rectas $y = mx$ que pasan por el punto $(0, 0)$ se comprueba que su valor es cero. Sin embargo, si se calculan a través de parábolas $y = mx^2$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=mx^2}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(mx^2)}{x^4 + (mx^2)^2} = \frac{m}{1 + m^2},$$

que depende de m , luego no existe límite de la función en $(0, 0)$ y, por tanto, f no es continua en $(0, 0)$.

- (b) Es evidente que las derivadas parciales existen y se anulan en $(0, 0)$, ya que $f(h, 0) = f(0, k) = f(0, 0) = 0$. En cuanto a la derivada direccional en el punto $(0, 0)$, calculamos el siguiente límite:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\frac{h}{\sqrt{2}}, \frac{h}{\sqrt{2}}) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\frac{h^2}{2} \cdot \frac{h}{\sqrt{2}}}{\frac{h^4}{4} + \frac{h^2}{2}}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2}h^3}{h^5 + 2h^3} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2}}{h^2 + 2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Luego $D_{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})}f(0, 0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.