Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía

Examen final de Matemáticas II. Mayo de 2013.

Apellidos:		**Nombre:**
DNI:	**Titulación:**	**Grupo:**

IMPORTANTE

- **DURACIÓN DEL EXAMEN: 2h**
- **NO** se permite el uso de calculadoras.
- **Sólo se entregará este cuadernillo.** Las respuestas deben escribirse en este cuadernillo ya que sólo se puntuará lo que haya en él. Por favor, compruebe que hay 10 páginas en el cuadernillo.
- **NO DESGRAPE LAS HOJAS DEL EXAMEN.**
- Es imprescindible identificarse ante el profesor.
- Lea las preguntas con cuidado. Todos los apartados del examen valen 1 punto, excepto en los apartados en los que se indica otra puntuación.
- Hay espacio adicional para operaciones al final del examen y detrás de esta página.

Problema	Puntuación
1	
2	
3	
4	
5	
6	
Total	

(1) *Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$*

$$\left\{\begin{array}{lcr} x+2y-3z & = & 4 \\ 3x-y+5z & = & 2 \\ 4x+y+(a^2-14)z & = & a+2 \end{array}\right.$$

se pide:

(a) *Clasifique el sistema según los valores de a.*

(b) *Resuelva el sistema anterior para los valores de a para los cuales el sistema tenga infinitas soluciones.*

Solución:

(a) La matrices asociadas al sistema son

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & a^2-14 & a+2 \end{array}\right) \overset{\substack{f_2 \mapsto f_2 - 3\times f_1 \\ f_3 \mapsto f_3 - 4\times f_1}}{\mapsto} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & -7 & a^2-2 & a-14 \end{array}\right)$$

$$\overset{f_3 \mapsto f_3 - f_2}{\mapsto} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & 0 & a^2-16 & a-4 \end{array}\right) \overset{f_2 \mapsto -\frac{1}{7}\times f_2}{\mapsto} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & \frac{10}{7} \\ 0 & 0 & a^2-16 & a-4 \end{array}\right)$$

Vemos que si $a \neq 4$ y $a \neq -4$ entonces rango A = rango$(A|B) = 3$ y el sistema es compatible determinado.

Si $a = 4$, entonces rango A = rango$(A|B) = 2$ y el sistema es compatible indeterminado con un parámetro.

Finalmente si $a = -4$, entonces rango $A = 2 <$ rango$(A|B) = 3$ y el sistema es incompatible.

(b) El sistema es compatible indeterminado cuando $a = 4$. Para este valor, el sistema original es equivalente al sistema

$$\left\{\begin{array}{lcr} x+2y-3z & = & 4 \\ y-2z & = & \frac{10}{7} \end{array}\right.$$

cuya solución es $x = \frac{8}{7} - z$, $y = \frac{10}{7} + 2z$, $z \in \mathbb{R}$.

(2) *Considere el conjunto* $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \le x+1, y \le -x+1, y > 0\}$ *y la función* $f(x,y) = y - x^2$.

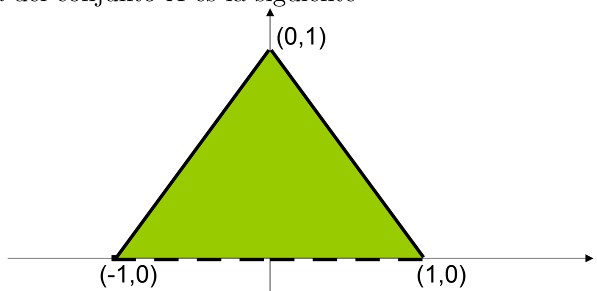
(a) *Dibuje el conjunto* A*, su frontera y su interior. Determine, justificando las respuestas, si el conjunto* A *es cerrado, abierto, acotado, compacto y/o convexo.*

(b) *(0.5* ***puntos****) ¿Se verifican las hipótesis del Teorema de Weierstrass para el conjunto* A *y la función* f*? ¿Por qué?*

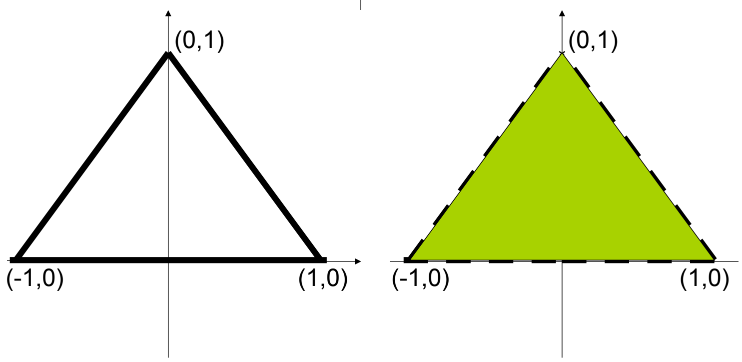
(c) *(1.5* ***puntos)*** *Dibuje las curvas de nivel de* f *indicando la dirección de crecimiento. Utilice las curvas de nivel para determinar, si existe, un valor máximo y/o mínimo global de* f *en* A*, así como los puntos donde se alcanzan.*

Solución:

(a) La representación gráfica del conjunto A es la siguiente



la frontera y el interior del conjunto A están representados en la siguiente figura



El conjunto A no es ni abierto (ya que A no coincide su interior) ni cerrado (ya que A no contiene a su frontera). Es acotado, ya que está contenido en la bola de centro $(0,0)$ y radio 2. El conjunto A no es compacto, ya que no es cerrado.

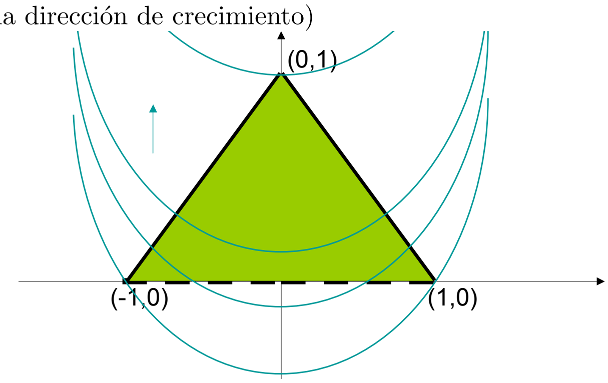
El conjunto A es convexo ya que

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g_1(x,y) \ge -1, g_2(x,y) \ge -1, g_3(x,y) > 0\}$$

y las funciones $g_1(x,y) = x - y$, $g_2(x,y) = -y - x$, $g_3(x,y) = y$ son lineales y por lo tanto cóncavas.

(b) No se verifican las hipótesis del Teorema de Weierstrass ya que A no es compacto (Es acotado pero no cerrado).

(c) Las curvas de nivel de f son los conjuntos $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 + c\}$ con $c \in \mathbb{R}$. Gráficamente, (la flecha apunta en la dirección de crecimiento)



Vemos que el máximo global se alcanza en el punto $P = (0,1)$. El valor máximo es $f(0,1) = 1 - 0 = 1$. No se alcanza un mínimo global en A.

(3) *Consideremos el problema de una empresa que tiene que producir* 42 *unidades de un cierto producto al menor coste posible. Si la empresa utiliza* K *unidades de capital y* L *unidades de trabajo su producción es* $\sqrt{K}+\sqrt{L}$ *unidades. Suponemos que los precios de cada unidad de capital y de trabajo son, respectivamente, de* 1 *y* 20 *unidades monetarias.*

(a) *Plantee el problema de optimización de la empresa. Escriba el Lagrangiano* $\mathcal{L}$ *y las ecuaciones de Lagrange.*

(b) *Resuelva las ecuaciones de Lagrange encontradas en el apartado anterior. Compruebe las condiciones de segundo orden para los puntos críticos obtenidos y halle la solución del problema.*
Ahora suponga que la empresa quisiera producir 41 *unidades. Utilizando los cálculos previos y sin resolver de nuevo el problema, determine el valor aproximado del ahorro de la empresa en este caso.*

Solución:

(a) El problema es

$$\begin{array}{ll} \min & K+20L \\ \text{s.a.} & \sqrt{K}+\sqrt{L}=42 \end{array}$$

La función de Lagrange es $\mathcal{L}(K,L)=K+20L+\lambda(42-\sqrt{K}-\sqrt{L})$. Las ecuaciones de Lagrange son

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K}=1-\frac{\lambda}{2\sqrt{K}} \\ 0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L}=20-\frac{\lambda}{2\sqrt{L}} \\ 0 &= 42-\sqrt{K}-\sqrt{L} \end{aligned}$$

(b) La solución es

$$\lambda=80, \quad K=1600, \quad L=4$$

El coste sería $K+20L=1680$ unidades monetarias. Para determinar las condiciones de segundo orden, calculamos la matriz Hessiana de $\mathcal{L}(x,y)$.

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial K \partial K}=\frac{\lambda}{4}K^{-3/2}, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial K \partial L}=\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial L \partial K}=0, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial L \partial L}=\frac{\lambda}{4}L^{-3/2}$$

Por lo tanto, la matriz Hessiana de $\mathcal{L}$ calculada en el punto $\lambda=80, K=1600, L=4$ es

$$H=20\begin{pmatrix} \frac{1}{64000} & 0 \\ 0 & \frac{1}{16\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

que es definida positiva. Por lo tanto el punto hallado es un mínimo local (y global).
El ahorro sería aproximadamente, $\lambda=80$.

(4) *Dado el sistema de ecuaciones*

$$\left.\begin{array}{rcl} x^2y + y^2z + z^2x & = & 5 \\ x + y + z & = & 2 \end{array}\right\}$$

(a) *Justifique, aplicando el teorema de la función implícita, que el sistema de ecuaciones anterior permite obtener las variables y, z como funciones de x en un entorno del punto $(x_0, y_0, z_0) = (1, -1, 2)$, de manera que x y las funciones $y(x)$, $z(x)$ son soluciones del anterior sistema de ecuaciones que verifican que $y(1) = -1$, $z(1) = 2$.*

(b) *Calcule la aproximación de Taylor de primer orden de las funciones $y(x)$, $z(x)$ alrededor del punto $x_0 = 1$.*

Solución:

(a) Llamando $f_1(x, y, z) = x^2y + y^2z + z^2x - 5$ y $f_2(x, y, z) = x + y + z - 2$ a las funciones que definen las restricciones tenemos que

- f_1 y f_2 son funciones polinómicas y por lo tanto $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$,
- Si sustituimos el punto $(1, -1, 2)$ en las ecuaciones obtenemos que se satisfacen.
- Por último, calculando el determinante de la matriz (en este caso una matriz 2×2) de las derivadas parciales respecto de las variables dependientes y z

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 + 2yz & y^2 + 2zx \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

sustituyendo por el punto $(1, -1, 2)$ queda

$$\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$$

(b) Para obtener las derivadas pedidas podemos derivar directamente respecto de x en las ecuaciones y obtenemos

$$\left.\begin{array}{rcl} 2xy + x^2y'(x) + 2yy'(x)z + y^2z'(x) + 2zz'(x)x + z^2 = 0 & = & 0 \\ 1 + y'(x) + z'(x) & = & 0 \end{array}\right\}$$

sustituyendo por el punto $(1, -1, 2)$ queda

$$\left.\begin{array}{rcl} -2 + y'(x) - 4y'(x) + z'(x) + 4z'(x) + 4 = 0 & = & 0 \\ 1 + y'(x) + z'(x) & = & 0 \end{array}\right\}$$

y resolviendo el sistema lineal de ecuaciones obtenemos

$$z'(1) = -\frac{5}{8}, \quad y'(1) = -\frac{3}{8}$$

Las aproximación de Taylor de primer orden de la función $y(x)$ en un entorno del punto $x_0 = 1$ es

$$P_1(x) = y(1) + y'(1)(x - 1) = -1 - \frac{3}{8}(x - 1)$$

y la de la función $z(x)$ es

$$Q_1(x) = z(1) + z'(1)(x - 1) = 2 - \frac{5}{8}(x - 1)$$

(5) *Considere la función* $f(x,y) = xye^{x+2y}$

(a) *Determine los puntos críticos (si existen) de la función* f *en el conjunto* $\mathbb{R}^2$.

(b) *Clasifique los puntos críticos del apartado anterior en máximos, mínimos (locales o globales) y puntos de silla.*

Solución:

(a) Buscamos los puntos críticos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y(1+x)e^{x+2y} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x(1+2y)e^{x+2y} = 0$$

Resolviendo el sistema se obtienen los puntos $P(0,0)$ y $Q(-1,-\frac{1}{2})$

(b) Para clasificarlos obtenemos la matriz Hessiana:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} y(2+x)e^{x+2y} & (1+x)(1+2y)e^{x+2y} \\ (1+x)(1+2y)e^{x+2y} & x(4+4y)e^{x+2y} \end{pmatrix}$$
$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto es un punto de silla

$$Hf(-1,-\frac{1}{2}) = e^{-2}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

En este caso tenemos un máximo local. No es global porque si hacemos tender x e y a infinito la función toma valores tan grandes como se quiera.

(6) *Dada la función* $f(x,y) = 2ax^2 - by^2 + 4x - 3$, *discutir, según los valores de los parámetros a y b cuándo* f *es estrictamente cóncava y/o estrictamente convexa.*

Solución: El vector gradiente de f es

$$\nabla f(x,y) = (4ax + 4, -2by)$$

La matriz Hessiana de f es

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 4a & 0 \\ 0 & -2b \end{pmatrix}$$

Por tanto la función será estrictamente convexa si $D_1 > 0$ *y* $D_2 > 0$; y estrictamente cóncava si $D_1 < 0$ *y* $D_2 > 0$, con $D_1 = 4a$ y

$$D_2 = \begin{vmatrix} 4a & 0 \\ 0 & -2b \end{vmatrix}$$

Dado que la matriz Hessiana es diagonal, es estrictamente convexa si los dos elementos de la diagonal principal son positivos; y estrictamente cóncava si son negativos.

En función de los parámetros a y b

- Si $4a > 0$ y $-2b > 0$, f(x,y) es estrictamente convexa.
- Si $4a < 0$ y $-2b < 0$, f(x,y) es estrictamente cóncava.

En resumen. $f(x,y)$ será estrictamente convexa para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ si $a > 0$ y $b < 0$, y $f(x,y)$ será estrictamente cóncava para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ si $a < 0$ y $b > 0$.