Universidad Carlos III de Madrid
Departamento de Economía
Examen final de Matemáticas II. Mayo de 2012.

Apellidos:	Nombre:	
DNI:	Titulación:	Grupo:

IMPORTANTE

- **DURACIÓN DEL EXAMEN: 2h**
- **NO** se permite el uso de calculadoras.
- **Sólo se entregará este cuadernillo.** Las respuestas deben escribirse en este cuadernillo ya que sólo se puntuará lo que haya en él. Por favor, compruebe que hay 10 páginas en el cuadernillo.
- **NO DESGRAPE LAS HOJAS DEL EXAMEN.**
- Es imprescindible identificarse ante el profesor.
- Lea las preguntas con cuidado. Cada apartado del examen vale 1 punto.
- Hay espacio adicional para operaciones al final del examen y detrás de esta página.

Problema	Puntuación
1	
2	
3	
4	
5	
Total	

(1) Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} ax + y = 3 \\ x - az = 2 \\ y + z = b \end{cases}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$.

- (a) Clasifique el sistema según los valores de a y b .
 - (b) Resuelva el sistema anterior para los valores de a y b para los cuales el sistema tenga infinitas soluciones.
-

(2) Considere el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq -x^2 + 1, y \leq -x^2 + 4, x > 0, y \geq 0\}$ y la función

$$f(x, y) = x + \frac{y}{2}.$$

- (a) Dibuje el conjunto A , su frontera y su interior. Determine, justificando las respuestas, si el conjunto A es cerrado, abierto, acotado, compacto y/o convexo.
 - (b) ¿Se verifican las hipótesis del Teorema de Weierstrass para el conjunto A y la función f ? Dibuje las curvas de nivel de f indicando la dirección de crecimiento. Utilice las curvas de nivel para determinar, si existe, un valor máximo y/o mínimo global de f en A , así como los puntos donde se alcanzan.
-

(3) Resuelva los dos apartados siguientes:

- (a) Dada la función $f(x, y) = y \ln xy - 3$, calcule la ecuación del plano tangente a la gráfica de f correspondiente al punto $(x, y) = (1/2, 2)$. Calcule la derivada de f en el punto $(1/2, 2)$ según el vector $v = (-1, 3)$
 - (b) Dada la función f del apartado anterior, calcule la aproximación de Taylor de f de orden dos alrededor del punto $(1/2, 2)$.
-

(4) Se considera la función $f(x, y) = 8ax^3 - 24xy + y^3$, donde $a \neq 0$.

- (a) Halle los puntos críticos de la función anterior.
 - (b) Clasifique los puntos críticos encontrados en el apartado anterior, según los valores del parámetro a .
-

(5) Considere la función

$$f(x, y) = x^4 - y^4$$

y el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

- (a) Halle las ecuaciones de Lagrange que determinan los extremos de f en A y obtenga los puntos que satisfacen las citadas ecuaciones.
 - (b) Caracterice las soluciones del apartado anterior en máximos y mínimos locales, utilizando las condiciones de segundo orden. ¿Se puede afirmar que alguno de los máximos o mínimos es global? (Justifique la respuesta)
-