Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía

Examen final de Matemáticas II. Mayo de 2011.

Apellidos:		**Nombre:**
DNI:	**Titulación:**	**Grupo:**

IMPORTANTE

- **DURACIÓN DEL EXAMEN: 2h**
- **NO** se permite el uso de calculadoras.
- **Sólo se entregará este cuadernillo.** Las respuestas deben escribirse en este cuadernillo ya que sólo se puntuará lo que haya en él. Por favor, compruebe que hay 10 páginas en el cuadernillo.
- **NO DESGRAPE LAS HOJAS DEL EXAMEN.**
- Es imprescindible identificarse ante el profesor.
- Lea las preguntas con cuidado. Cada apartado del examen vale 1 punto.
- Hay espacio adicional para operaciones al final del examen y detrás de esta página.

Problema	Puntuación
1	
2	
3	
4	
5	
Total	

(1) *Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} (b+2)x + by + z & = & 1 \\ (b+2)x + y + bz & = & 1 \\ (b+2)x + y + z & = & b \end{array} \right.$$

donde $b \in \mathbb{R}$ es un parámetro.

(a) *Clasifique el sistema según los valores de b.*

(b) *Resuelva el sistema anterior para los valores de b para los cuales el sistema tenga infinitas soluciones.*

Solución:

(a) La matrices asociadas al sistema son

$$A = \begin{pmatrix} b+2 & b & 1 \\ b+2 & 1 & b \\ b+2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} b+2 & b & 1 & 1 \\ b+2 & 1 & b & 1 \\ b+2 & 1 & 1 & b \end{array} \right)$$

Estudiamos los posibles rangos de A y los comparamos con los de $(A|B)$. Después de operaciones elementales con filas en la matriz $(A|B)$, obtenemos la matriz siguiente

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} b+2 & b & 1 & 1 \\ 0 & 1-b & b-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-b & b-1 \end{array} \right)$$

Se observa claramente que, si $b \neq -2$ y $b \neq 1$, entonces $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|B) = 3$. En estos casos, el sistema es compatible determinado.

Si $b = 1$ entonces

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

y vemos que $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|B) = 1$. En este caso, el sistema es compatible indeterminado con 2 parámetros. Finalmente, si $b = -2$, entonces

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{array} \right)$$

Claramente, $\text{rango}(A) = 2$ cuando $b = -2$. Por otra parte, sumando la primera fila multiplicada por 3 a la tercera fila obtenemos la matriz

$$D = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & 6 & 0 \end{array} \right)$$

y vemos que, cuando $b = -2$, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|B) = 2$ y el sistema is compatible indeterminado con un parámetro.

(b) El sistema es compatible indeterminado para $b = 1$ y $b = -2$. Para $b = 1$, el sistema original es equivalente a la ecuación $3x + y + z = 1$ cuya solución es $\{(\alpha, \beta, 1 - 3\alpha - \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

Para $b = -2$, el sistema original es equivalente al siguiente sistema, formado por las últimas dos ecuaciones

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

cuya solución es $\{(\alpha, -1, -1) : \alpha \in \mathbb{R}\}$.

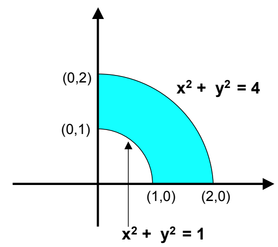
(2) *Dado el conjunto* $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$,

(a) *Dibuje el conjunto* A*, su frontera y su interior. Determine si el conjunto* A *es cerrado, abierto, acotado, compacto y/o convexo.*

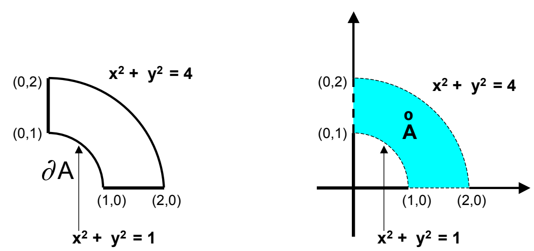
(b) *Dada la función* $f(x,y) = x + y$*, justifique que alcanza un máximo y un mínimo globales en el conjunto* A*. Dibuje las curvas de nivel de* f *indicando la dirección de crecimiento. Utilice las curvas de nivel para calcular el máximo y el mínimo globales de* f *en* A*.*

Solución:

(a) La represetación gráfica del conjunto A es la siguiente

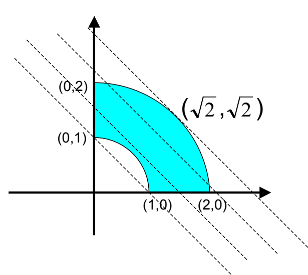


la frontera y el interior del conjunto A se pueden representar como



El conjunto A no es abierto, pero es cerrado y A está contenido en la bola de centro $(0,0)$ y radio 2 luego es acotado y por tanto compacto. A no es convexo pues el interior del segmento que une los puntos $(1,0)$ y $(0,1)$ está fuera del conjunto.

(b) El conjunto es compacto y la función f es continua en A. Luego, la función f alcanza un máximo y un mínimo en A. Según las curvas de nivel el mínimo



se alcanza en $(1,0)$ y $(0,1)$ y el valor mínimo es $f(0,1) = f(1,0) = 1$. La curva de nivel máximo es tangente a la circunferencia de radio 2. Las curvas de nivel son rectas de pendiente -1. Para un punto de la circunferencia con $x \neq 0$, la pendiente de su recta tangente está dada por la derivada implicita de y respecto a x en la curva de nivel $x^2 + y^2 = 4$. Derivando implícitamente, obtenemos $2x + 2yy' = 0$. Asumiendo que $y' = -1$, resulta $x = y$. Por tanto, $2x^2 = 4$, con $x > 0$, de donde obtenemos que $x = y = \sqrt{2}$. El valor máximo es $f(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$.

(3) *Considere la función*

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

(a) *Pruebe que la función f es continua en el punto $(0,0)$.*

(b) *Calcule las derivadas parciales de f en el punto $(0,0)$. Calcule la derivada de f en el punto $(0,0)$ según el vector $v=(1,1)$. ¿Es la función f diferenciable en el punto $(0,0)$?*

Solución:

(a) Sea $\varepsilon>0$. Tomamos $\delta=\varepsilon$. Para $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tal que $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$, tenemos que

$$|f(x,y)-f(0,0)|=|x|\frac{y^2}{x^2+y^2}\leq|x|=\sqrt{x^2}\leq\sqrt{x^2+y^2}<\delta=\varepsilon$$

donde hemos usado que $y^2\leq x^2+y^2$, $x^2\leq x^2+y^2$. Por lo tanto,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$$

por lo que la función es continua en $(0,0)$.

(b) Las derivadas parciales de f en el punto $(0,0)$ son

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{t\to0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{0}{t}=0\\ \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{t\to0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{0}{t}=0\end{aligned}$$

La derivada de f en el punto $(0,0)$ según el vector $v=(1,1)$ es

$$D_vf(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{f(t,t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{t^3}{2t^3}=\frac{1}{2}$$

Como $D_vf(0,0)\neq\nabla f(0,0)\cdot v$, la función no es diferenciable en $(0,0)$.

(4) *Se considera la función* $f(x,y) = x^2 + y^2 + ax^2y$, *donde* $a \neq 0$.

(a) *Halle los puntos críticos de la función anterior, determinando en qué cuadrante se hallan, en términos del parámetro* a.

(b) *Clasifique los puntos críticos de la función anterior.*

Solución:

(a) en primer lugar, hallamos los puntos críticos de la función:

$$\partial f/\partial x = 2x + 2axy = 2x(1+ay) = 0, \quad \partial f/\partial y = 2y + ax^2 = 0$$

De la primera ecuación obtenemos que, o bien $x = 0$, o bien $y = -1/a$.
Aplicando estos resultados a la segunda ecuación, se obtiene que:
(1) si $x = 0 \Longrightarrow y = 0$
(2) si $y = -1/a \Longrightarrow ax^2 = 2/a \Longrightarrow x = \pm\sqrt{2}/|a|$
Por lo tanto, los puntos críticos de la función son: $(0,0), (\sqrt{2}/|a|, -1/a), (-\sqrt{2}/|a|, -1/a)$.
Así pues, si $a > 0$, los puntos críticos se hallan en el origen, en el cuarto cuadrante y en el tercero.
Y, si $a < 0$, los puntos críticos se hallan en el origen, en el primer cuadrante y en el segundo.

(b) Hallamos el hessiano de la función:
$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2(1+ay) & 2ax \\ 2ax & 2 \end{pmatrix}$
Sustituimos el hessiano de la función en los diferentes puntos críticos:
$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, luego el hessiano es definido positivo y el punto crítico es un mínimo local.
$Hf(\sqrt{2}/|a|, -1/a) = \begin{pmatrix} 0 & 2a\sqrt{2}/|a| \\ 2a\sqrt{2}/|a| & 2 \end{pmatrix}$, luego el hessiano es indefinido (pues el determinante es negativo) y el punto crítico es un punto de silla.
$Hf(-\sqrt{2}/|a|, -1/a) = \begin{pmatrix} 0 & -2a\sqrt{2}/|a| \\ -2a\sqrt{2}/|a| & 2 \end{pmatrix}$, luego el hessiano es indefinido (pues el determinante es negativo) y el punto crítico es un punto de silla.

(5) *Considere la función*

$$f(x,y) = 2x^4 + (y-1)^2$$

y el conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + 2y = 22\}$.

(a) *Halle las ecuaciones de Lagrange que determinan los extremos de* f *en* A *y determine los puntos que satisfacen las citadas ecuaciones.*

(b) *Sabiendo que* f *alcanza un mínimo global en el conjunto* A*, hallarlo (sin necesidad de demostrar que existe). Asimismo, probar que* f ***NO*** *alcanza un máximo global en el conjunto* A.

Solución:

(a) El lagrangiano asociado al problema de maximización es

$$L = 2x^4 + (y-1)^2 + \lambda(22 - x^4 - 2y)$$

de donde obtenemos las ecuaciones de Lagrange,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} : &\qquad 8x^3 - 4\lambda x^3 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} : &\qquad 2(y-1) - 2\lambda = 0 \\ &\qquad x^4 + 2y = 22 \end{aligned}$$

La primera ecuación puede escribirse como $4x^3(2-\lambda) = 0$, por lo que $x = 0$ o bien $2 = \lambda$. Una solución es $x = 0$, $y = 11$, $\lambda = 10$. Las otra soluciones son $x = 2$, $y = 3$, $\lambda = 2$ y $x = -2$, $y = 3$, $\lambda = 2$.

(b) Si existe un mínimo global en A, debe verificar las ecuaciones de Lagrange. Los valores de la función en los puntos que verifican estas ecuaciones son $f(0,11) = 100$, $f(-2,3) = f(2,3) = 36$. Concluimos que f alcanza un mínimo global en los puntos $(2,3)$ y $(-2,3)$.

El conjunto A puede escribirse como $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 11 - x^4/2\}$. La variable x puede tomar valores arbitrarios y, por lo tanto no está acotada. La función f verifica que $f(x,y) = 2x^4 + (y-1)^2 \geq 2x^4$. Por lo tanto, f no está acotada en A y no tiene máximo global en A.

Finalmente razonamos por qué f alcanza un mínimo global en A (aunque no se pide que se demuestre esto). Hemos visto que existe un $a > 0$ tal que si $|x| > a$ y $(x,y) \in A$, entonces $f(x,y) \geq f(0,11) = 100$. Sea $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + 2y = 22, |x| \leq a\}$. El conjunto B es compacto y f alcanza un mínimo global en B, digamos en el punto $p \in A$. Como $(0,11) \in B$, tenemos también que $f(x,y) \geq f(0,11) \geq f(p)$ para todo $(x,y) \notin A$.