

- (1) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función de un parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} ax + y + z &= 1 \\ x + ay + z &= a \\ x + y + az &= a^2 \end{cases}$$

se pide:

- (a) Clasifique el sistema según los valores de a . **1 punto**
- (b) Resuelva el sistema anterior para el valor de $a = 1$. **1 punto**
-

(2)

- (a) Demuestre que el sistema

$$\begin{aligned} y^2 + z^2 - x^2 + 2 &= 0 \\ yz + xz - xy - 1 &= 0 \end{aligned}$$

define dos funciones $y = y(x)$, $z = z(x)$ en un entorno del punto $(x, y, z) = (2, 1, 1)$. Calcule $y'(2)$, $z'(2)$. **1 punto**

- (b) Considere las funciones $F(x, y, z) = xz - y^2$ y $G(x) = F(x, y(x), z(x))$. Calcule $G'(2)$. **1 punto**
-

- (3) Considere la función $f(x, y) = \frac{x^2}{y} + ay^2$ con $a \in \mathbb{R}$ definida en el conjunto abierto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$.

- (a) Estudie la convexidad de la función f en el conjunto A , dependiendo de los valores del parámetro a . **1 punto**
- (b) Halle el polinomio de Taylor de orden 2 de la función f en el punto $p = (0, 1)$. **1 punto**
-

- (4) Considere la función $f(x, y, z) = x - y + z$ y el conjunto $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 9, x + z = 4\}$.

- (a) Halle las ecuaciones de Lagrange que determinan los extremos de f en el conjunto A . Obtenga los puntos que satisfacen las citadas ecuaciones y el valor de los multiplicadores de Lagrange correspondientes a cada uno de los puntos. **1 punto**
- (b) Caracterice las soluciones del apartado anterior en máximos y mínimos locales, utilizando las condiciones de segundo orden para óptimos locales. ¿Se puede afirmar que alguno de los máximos o mínimos es global en el conjunto A ? Justifique adecuadamente las respuestas. **1 punto**
-

- (5) Considere la función $f(x, y) = x^4 + y^3 - 2a^2x^2 - 3y$ con $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

- (a) Determine los puntos críticos (si existen) de la función f en el conjunto $\mathbb{R}^2$. **1 punto**
- (b) Clasifique los puntos críticos del apartado anterior en máximos, mínimos (locales y globales) y puntos de silla. **1 punto**