

- (1) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función de un parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$$

se pide:

- (a) Clasifique el sistema según los valores de a . **1 punto**

Solución: Tras operaciones elementales con filas se obtiene que el sistema propuesto es equivalente al sistema de ecuaciones lineales cuya matriz ampliada es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a^2 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-a^2 \\ 0 & 0 & -a^2-a+2 & -a^3-a^2+a+1 \end{pmatrix}$$

Deducimos que si $a \neq 1$ y $a \neq -2$ el sistema es compatible determinado. Supongamos que $a = 1$. El sistema propuesto es equivalente al sistema de ecuaciones lineales cuya matriz ampliada es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

por lo que el sistema es compatible indeterminado con 2 parámetros. Si $a = -2$ el sistema propuesto es equivalente al sistema de ecuaciones lineales cuya matriz ampliada es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

por lo que el sistema es incompatible.

- (b) Resuelva el sistema anterior para el valor de $a = 1$. **1 punto**

Solución: El sistema propuesto es equivalente al siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$x + y + z = 1$$

Eligiendo x, y como parámetros el conjunto de soluciones es $\{(x, y, 1-x-y) : x, y \in \mathbb{R}\}$.

(2)

- (a) Demuestre que el sistema

$$\begin{aligned} y^2 + z^2 - x^2 + 2 &= 0 \\ yz + xz - xy - 1 &= 0 \end{aligned}$$

define dos funciones $y = y(x)$, $z = z(x)$ en un entorno del punto $(x, y, z) = (2, 1, 1)$. Calcule $y'(2)$, $z'(2)$. **1 punto**

Solución: Consideramos las funciones $f_1(x, y, z) = y^2 + z^2 - x^2 + 2$, $f_2(x, y, z) = yz + xz - xy - 1$. Calculamos

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial y \partial z} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2y & 2z \\ z-x & x+y \end{vmatrix} = 2(x+y-z)(y+z)$$

por lo que $J(f_1, f_2)(2, 1, 1) = 8$ y, por el teorema de la función implícita, vemos que el sistema anterior define dos funciones $y = y(x)$, $z = z(x)$ en un entorno del punto $(x, y, z) = (2, 1, 1)$. Derivando implícitamente el sistema obtenemos que

$$\begin{aligned} 2y(x)y'(x) + 2z(x)z'(x) - 2x &= 0 \\ y'(x)z(x) + y(x)z'(x) + z(x) + xz'(x) - y(x) - xy'(x) &= 0 \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores $x = 2$, $y(2) = 1$, $z(2) = 1$ Obtenemos el sistema

$$2y'(2) + 2z'(2) - 4 = 0$$

$$3z'(2) - y'(2) = 0$$

y obtenemos $y'(2) = \frac{3}{2}$, $z'(2) = \frac{1}{2}$.

- (b) Considere las funciones $F(x, y, z) = xz - y^2$ y $G(x) = F(x, y(x), z(x))$. Calcule $G'(2)$. **1 punto**

Solución: Derivando implícitamente obtenemos $G'(x) = -2y(x)y'(x) + xz'(x) + z(x)$. Por lo que $G(2) = -2y(2)y'(2) + 2z'(2) + z(2) = -1$.

- (3) Considere la función $f(x, y) = \frac{x^2}{y} + ay^2$ con $a \in \mathbb{R}$ definida en el conjunto abierto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$.

- (a) Estudie la convexidad de la función f en el conjunto A , dependiendo de los valores del parámetro a . **1 punto**

Solución: Necesitamos la matriz hessiana para estudiar el signo de la forma cuadrática asociada. Primero obtenemos el gradiente:

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = \left(\frac{2x}{y} \quad \frac{-x^2}{y^2} + 2ay \right)$$

y derivando una vez más obtenemos la matriz hessiana:

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{y} & \frac{-2x}{y^2} \\ \frac{-2x}{y^2} & \frac{2x^2}{y^3} + 2a \end{pmatrix}$$

Calculamos la sucesión de menores principales: $D_1 = \frac{2}{y}$ y $D_2 = \frac{2}{y} \left(\frac{2x^2}{y^3} + 2a \right) - \left(\frac{-2x}{y^2} \right)^2 = \frac{4a}{y}$ de donde obtenemos que: $\forall (x, y) \in A$ y $\forall a \geq 0$ $D_1 > 0$ y $D_2 \geq 0$ y por tanto Hf es definida positiva o semidefinida positiva, luego f es convexa. $\forall (x, y) \in A$ y $\forall a < 0$ $D_1 > 0$ y $D_2 < 0$ y por tanto Hf es indefinida, luego f no es ni cóncava ni convexa

- (b) Halle el polinomio de Taylor de orden 2 de la función f en el punto $p = (0, 1)$. **1 punto**

Solución: El polinomio de Taylor es

$$\begin{aligned} p_2(x, y) &= f(0, 1) + \nabla f(0, 1) \cdot (x, y - 1) + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x & y - 1 \end{pmatrix} Hf(0, 1) \begin{pmatrix} x \\ y - 1 \end{pmatrix} \\ &= a + 2a(y - 1) + x^2 + a(y - 1)^2 \end{aligned}$$

- (4) Considere la función $f(x, y, z) = x - y + z$ y el conjunto $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 9, x + z = 4\}$.

- (a) Halle las ecuaciones de Lagrange que determinan los extremos de f en el conjunto A . Obtenga los puntos que satisfacen las citadas ecuaciones y el valor de los multiplicadores de Lagrange correspondientes a cada uno de los puntos. **1 punto**

Solución: El lagrangiano es $L = x - y + z - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 9) - \mu(x + z - 4)$. Obtenemos las ecuaciones de Lagrange:

$$1 - 2\lambda x - \mu = 0, \quad -1 - 2\lambda y = 0, \quad 1 - 2\lambda z - \mu = 0, \quad x + z = 4 \quad x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

Las soluciones son

$$x = z = 2, y = -1, \lambda = \frac{1}{2}, \mu = -1$$

$$x = z = 2, y = 1, \lambda = -\frac{1}{2}, \mu = 3$$

- (b) Caracterice las soluciones del apartado anterior en máximos y mínimos locales, utilizando las condiciones de segundo orden para óptimos locales. ¿Se puede afirmar que alguno de los máximos o mínimos es global en el conjunto A ? Justifique adecuadamente las respuestas. **1 punto**

Solución: La matriz Hessiana es

$$H(x, y, z; \lambda, \mu) = \begin{pmatrix} -2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda \end{pmatrix}$$

En el punto $x = z = 2, y = -1, \lambda = \frac{1}{2}, \mu = -1$, obtenemos

$$H(2, -1, 2; 1/2, -1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

que es definida negativa. Por lo tanto el punto $x = z = 2, y = -1$ es un máximo local. En el punto $x = z = 2, y = 1, \lambda = -\frac{1}{2}, \mu = 3$, obtenemos

$$H(2, 1, 2; 1/2, 3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que es definida positiva. Por lo tanto el punto $x = z = 2, y = 1$ es un mínimo local.

Como el conjunto A es compacto y la función f es continua. Deducimos que los puntos calculados corresponden a un mínimo y un máximo globales de f sobre A .

- (5) Considere la función $f(x, y) = x^4 + y^3 - 2a^2x^2 - 3y$ con $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$.

- (a) Determine los puntos críticos (si existen) de la función f en el conjunto $\mathbb{R}^2$. **1 punto**

Solución: El gradiente de f es

$$(-4x(a-x)(a+x), 3(y^2-1))$$

las ecuaciones que definen los puntos críticos son

$$\begin{aligned} 0 &= x(a-x)(a+x) \\ 0 &= y^2-1 \end{aligned}$$

Las soluciones son $(0, \pm 1), (\pm a, \pm 1)$.

- (b) Clasifique los puntos críticos del apartado anterior en máximos, mínimos (locales y globales) y puntos de silla. **1 punto**

Solución: La matriz Hessiana es

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4a^2 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$$

Vemos que

$$H(0, -1) = \begin{pmatrix} -4a^2 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}, \quad H(-a, -1) = \begin{pmatrix} 8a^2 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}, \quad H(a, -1) = \begin{pmatrix} 8a^2 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$H(0, 1) = \begin{pmatrix} -4a^2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad H(-a, 1) = \begin{pmatrix} 8a^2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad H(a, 1) = \begin{pmatrix} 8a^2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

por lo que el punto $(0, -1)$ corresponde a un máximo local, los puntos $(\pm a, 1)$ corresponden a dos mínimos locales y los puntos $(-a, -1), (a, -1), (0, 1)$ corresponden a puntos de silla. Por otra parte, vemos que $f(x, 0) = x^4 - 2a^2x^2$. Por lo que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x, 0) = +\infty$ y no existe máximo global. También observamos que $f(0, y) = y^3 - 3y$. Por lo que $\lim_{y \rightarrow -\infty} f(0, y) = -\infty$ y no existe mínimo global.