$\boxed{1}$

Dados los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ se considera el siguiente sistema lineal:

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x & +2y & +2z & = & -4 \\ 2x & +6y & +3z & = & -8 \\ x & +6y & +az & = & -b-4 \\ -x & -2y & +(a-2)z & = & -a+4 \end{array}\right.$$

(a) (6 puntos) Discutir el sistema según los valores de los parámetros a, b.

(b) (4 puntos) Hallar la solución del sistema para los valores de los parámetros a y b en que éste es compatible determinado.

Solución:

(a) Realizamos transformaciones elementales sobre la matriz aumentada A^* del sistema hasta encontrar la matriz escalonada equivalente.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & -4 \\ 2 & 6 & 3 & -8 \\ 1 & 6 & a & -b-4 \\ -1 & -2 & a-2 & -a+4 \end{array}\right) \overset{\substack{f_2-2f_1 \\ f_3-f_1 \\ f_4+f_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & a-2 & -b \\ 0 & 0 & a & -a \end{array}\right) \overset{f_3-2f_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & a & -a \end{array}\right)$$

$$\overset{f_4-f_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & 0 & b-a \end{array}\right).$$

Si $a \neq b$ el sistema es incompatible; si $a = b$ y $a \neq 0$, el sistema es compatible determinado; si $a = b = 0$, el sistema es compatible indeterminado.

(b) El sistema es compatible determinado si $a = b$ y $a \neq 0$. De la tercera ecuación del sistema escalonado tenemos $z = -1$, de la segunda $2y - z = 0$, o $y = -\frac{1}{2}$ y de la primera $x + 2y + 2z = -4$, o $x = -4 + 1 + 2 = -1$. La solución es $x = -1$, $y = -\frac{1}{2}$, $z = -1$.

$\boxed{2}$

Se considera el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, x \neq y\}$ y la función $f(x, y) = x^2 - 4y$.

(a) (3 puntos) Representar gráficamente el conjunto A. ¿Se cumplen las hipótesis del Teorema de Weierstrass? ¿Por qué?

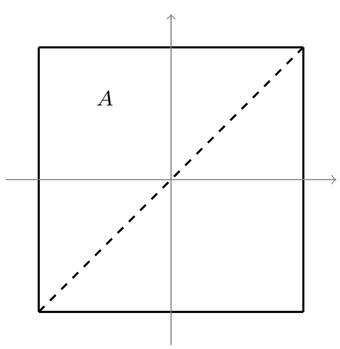
(b) (7 puntos) Con la ayuda de las curvas de nivel de la función f, hallar, si existen, los extremos absolutos de f en el conjunto A.

Solución:

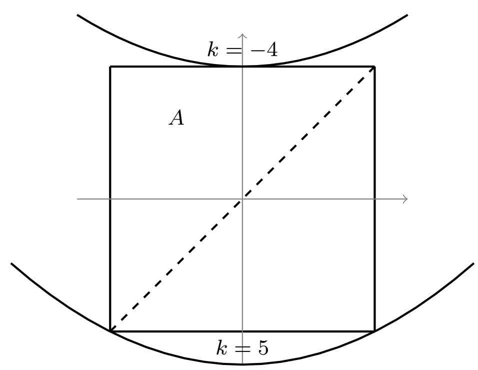
(a) El conjunto A se representa más abajo. El conjunto A es acotado pero no es cerrado, ya que no contiene a toda su frontera (concretamente los puntos de la diagonal, (x, x)). Por tanto, no se cumple una de las hipótesis del Teorema de Weierstrass, a pesar de que la función es continua.

(b) La curva de nivel k es una parábola convexa, $y = \frac{x^2}{4} - \frac{k}{4}$ con vértice sobre el eje OY, $(0, -k/4)$. A medida que el vértice se desplaza hacia abajo, k aumenta, por lo que la parábola más inferior posible que toque al conjunto A proporcionará los máximos globales de f en A. De la misma forma, la parábola más superior posible que toque al conjunto A proporcionará los mínimos globales de f en A. Ver el dibujo más abajo a la derecha. En él se observa que, en el primer caso, los cortes de la parábola con el cuadrado $[-1, 1] \times [-1, 1]$ son los puntos $(1, -1)$ y $(-1, -1)$. De ellos, sólo $(1, -1)$ está en A. Notar que el nivel k queda determinado por $1^2 - 4(-1) = 5 = k$. Luego el máximo global de f en A es $(1, -1)$ y el valor máximo de f es 5. En el segundo caso, la parábola es tangente a la recta $y = 1$, es decir, corta en un único punto, que claramente es el $(0, 1)$. El nivel k queda determinado por $0^2 - 4 = k = -4$. Luego el mínimo global de f en A es $(0, 1)$ y el valor mínimo es -4.

Conjunto



Curvas de nivel



$\boxed{3}$

Se considera la función $f(x, y) = -\dfrac{x^2}{2} + 4xy - y^4$.

(a) (5 puntos) Determinar los conjuntos abiertos y convexos más grandes de $\mathbb{R}^2$ donde la función f es cóncava o convexa.

(b) (5 puntos) Hallar los extremos locales de f en caso de que existan.

Solución:

(a) La función f es de clase $\mathcal{C}^2$ en $\mathbb{R}^2$ ya que es polinómica. El gradiente de f es

$$\nabla f(x, y) = (-x + 4y, 4x - 4y^3).$$

La matriz Hessiana de f es

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -12y^2 \end{pmatrix}.$$

Los menores principales son $D_1 = -1 < 0$ y $D_2 = 12y^2 - 16$. Luego f no es convexa en ninguna región de $\mathbb{R}^2$. El determinante es no negativo sii $y^2 \geq \dfrac{4}{3}$, es decir, si $|y| \geq \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Por tanto, f es cóncava (estrictamente) en cada uno de los conjuntos abiertos y convexos $C_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y > \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right\}$ y $C_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y < -\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right\}$. Notar que $C_1 \cup C_2$ no es una respuesta correcta, ya que este conjunto no es convexo.

(b) Los puntos críticos de f verifican el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcl} -x + 4y & = & 0 \\ 4x - 4y^3 & = & 0 \end{array}\right\}.$$

Al substituir $x = 4y$ en la segunda ecuación tenemos $16y - 4y^3 = 4y(4 - y^2) = 0$, con soluciones 0, ± 2, por lo que los puntos críticos son $(0, 0)$, $(8, 2)$ y $(-8, -2)$. El primer punto es de silla y los dos últimos son máximos locales de f.

$\boxed{4}$

Se considera el problema de optimizar la función $f(x,y)=x$ en el conjunto $A=\{(x,y)\,:\,x^2+xy-y^2=20\}$.

(a) (4 puntos) Obtener las ecuaciones de Lagrange del problema y encontrar los puntos críticos, junto con el multiplicador de Lagrange correspondiente.

(b) (6 puntos) Clasificar los puntos críticos hallados en el apartado anterior.

Solución:

(a) La función Lagrangiana del problema es

$$L(x,y,\lambda)=x+\lambda(20-x^2-xy+y^2).$$

y las ecuaciones de Lagrange son

$$\left\{\begin{array}{rcl} L'_x=1+\lambda(-2x-y) & = & 0\\ L'_y=\lambda(-x+2y) & = & 0\\ L'_\lambda=20-x^2-xy+y^2 & = & 0, \end{array}\right.$$

de donde deducimos que $\lambda\neq 0$ y por tanto $x=2y$. Sustituyendo en la restricción tenemos $4y^2+2y^2-y^2=20$, o $y=\pm 2$. Encontramos dos puntos críticos, $(4,2)$ y $(-4,-2)$. El valor de λ en cada caso se encuentra sustituyendo en la ecuación $L'_x=0$, para obtener $\lambda=1/10$ para el punto $(4,2)$ o $\lambda=-1/10$ para el punto $(-4,-2)$.

(b) La matriz Hessiana de la Lagrangiana con respecto a las variables (x,y) es

$$\mathcal{H}_{(x,y)}L(x,y,\lambda)=\begin{pmatrix} -2\lambda & -\lambda\\ -\lambda & 2\lambda \end{pmatrix}.$$

Al substituir los puntos críticos tenemos

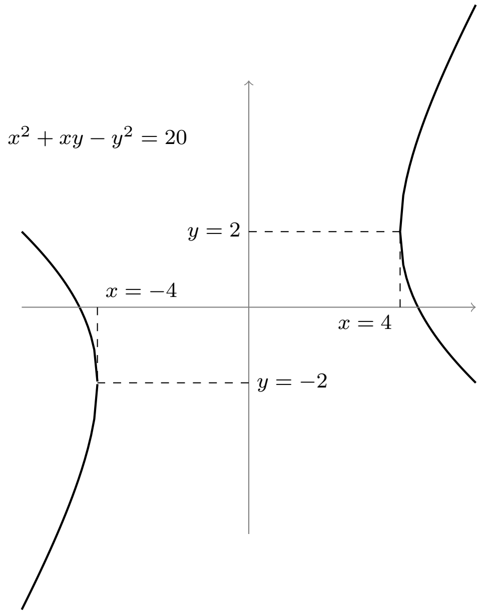
$$\mathcal{H}_{(x,y)}L(4,2,1/10)=\begin{pmatrix} -1/5 & 1/10\\ 1/10 & 1/5 \end{pmatrix}$$

que es indefinida. Estudiamos la forma cuadrática restringida al espacio tangente a la restricción en el punto $(4,2)$. El gradiente de la restricción es $\nabla g(x,y)=(2x+y,x-2y)$. En el punto $(4,2)$ es $\nabla g(4,2)=(10,0)$. El espacio tangente $T(4,2)=\{(h,k)\,:\,(h,k)\cdot\nabla g(4,2)=0\}=\{(h,k)\,:\,(h,k)\cdot(10,0)=0\}=\{h=0\}$. La restricción de la forma cuadrática a $T(4,2)$ es $\frac{1}{5}k^2$, que es definida positiva, por lo que $(4,2)$ es un mínimo local de f en A. Del mismo modo, la matriz

$$\mathcal{H}_{(x,y)}L(-4,-2,-1/10)=\begin{pmatrix} 1/5 & 1/10\\ 1/10 & -1/5 \end{pmatrix}$$

es indefinida. El espacio tangente $T(-4,-2)=\{(h,k)\,:\,(h,k)\cdot\nabla g(-4,-2)=0\}=\{(h,k)\,:\,(h,k)\cdot(-10,0)=0\}=\{h=0\}$. La forma cuadrática restringida es $-\frac{1}{5}k^2$, definida negativa, por lo que $(-4,-2)$ es un máximo local de f en A.

Nota: Como sabemos, el hecho de que en el mínimo local el valor de la función sea mayor que en el máximo local no es contradictorio. La figura de más abajo muestra la gráfica de las restricción.


$x^2 + xy - y^2 = 20$
$y = 2$
$x = -4$
$x = 4$
$y = -2$

$\boxed{5}$

Se considera la ecuación

$$zx^2 + e^{-xz} + yz = 0.$$

(a) (4 puntos) Demostrar que esta ecuación define una función $z(x,y)$ de clase $\mathcal{C}^1$ en un entorno del punto $(x,y) = (0,-1)$ tal que $z(0,-1) = 1$.

(b) (6 puntos) Calcular el polinomio de Taylor de primer orden de $z(x,y)$ en el punto $(x,y) = (0,-1)$.

Solución:

(a) Comprobamos que se satisfacen las hipótesis del Teorema de la Función Implícita. Denotamos $f(x,y,z) := zx^2 + e^{xz} + yz$. Tenemos

- $f \in \mathcal{C}^1$ ya que es suma de funciones elementales.
- $f(0,-1,1) = 0 + 1 - 1 = 0$.
- Por otra parte,
$$\frac{\partial f}{\partial z}(0,-1,1) = x^2 - xe^{xz} + y|_{(0,-1,1)} = -1 \neq 0.$$

Luego la ecuación define a la variable z como función de clase $\mathcal{C}^1$ de (x,y) en un entorno del punto $(0,-1,1)$, y además $z(0,-1) = 1$.

(b) Derivamos la ecuación con respecto a x y con respecto a y para obtener dos ecuaciones ($\dfrac{\partial z}{\partial x}(x,y)$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}(x,y)$ son reemplazadas por z'_x y z'_y respectivamente, para simplificar la notación).

$$\left.\begin{array}{rcl} z'_x x^2 + 2xz - (z + xz'_x)e^{-xz} + yz'_x & = & 0 \\ z'_y x^2 - xz'_y e^{-xz} + z + yz'_y & = & 0 \end{array}\right\}$$

Ahora, substituimos $(0,-1,1)$ para obtener el sistema lineal

$$\left.\begin{array}{rcl} -1 - z'_x(0,-1) & = & 0 \\ 1 - z'_y(0,-1) & = & 0 \end{array}\right\}$$

cuya solución es $z'_x(0,-1) = -1$ y $z'_y(0,-1) = 1$. El polinomio de Taylor de primer orden de $z(x,y)$ en el punto $(0,-1)$ es

$$z(0,-1) + z'_x(0,-1)x + z'_y(0,-1)(y+1) = 1 - x + y + 1 = 2 - x + y.$$

$\boxed{6}$

Se considera la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0, y \in \mathbb{R}, \\ 0 & \text{si } x = 0, y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(a) (4 puntos) Estudiar la continuidad de f en el punto $(0,0)$.

(b) (6 puntos) Dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $a > 0$ y $a^2 + b^2 = 1$, calcular la derivada direccional de la función f en el punto $(0,0)$ en la dirección del vector $\mathbf{v} = (a,b)$, es decir, $D_{(a,b)}f(0,0)$. ¿Cuándo dicha derivada direccional toma el menor valor posible?

Solución:

(a) La función no es continua en $(0,0)$. Por ejemplo, calculando el límite en $(0,0)$ siguiendo la curva $y = m\sqrt{x}$, $x > 0$, tenemos

$$\lim_{x \to 0^+, y = m\sqrt{x}} f(x,y) = \lim_{x \to 0^+} \frac{m^2 x}{x} = m^2$$

que depende de m, luego no existe el límite de f en $(0,0)$, por lo que f no es continua en $(0,0)$.

(b)

$$D_{(a,b)}f(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f\big((0,0) + t(a,b)\big) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(ta, tb) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{t^2 b^2}{t^2 a} = \frac{b^2}{a} = \frac{1 - a^2}{a}.$$

Dado que $0 < a \leq 1$, la derivada direccional es mínima cuando $a = 1$, es decir, en la dirección $(a,b) = (1,0)$.