UC3M

Matemáticas para la Economía II

Examen Final, 06/27/2014 **Soluciones**

$\boxed{1}$

Considere la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) (5 points) Demuestre que $A^3 + I = O$, donde I representa la matriz identidad y O la matriz nula.

(b) (5 points) Usando el apartado anterior (a), calcule A^{10}.

Solución:

(a) Es fácil comprobar que $A^3 = -I$, por lo tanto $A^3 + I = O$.

(b) Por el apartado anterior (a) tenemos $A^{10} = (A^3)^3 A = (-I)^3 A = -A$.

$\boxed{2}$

Dado el conjunto de puntos $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ y para $a \in \mathbb{R}$ consideramos la función $f(x, y) = \ln(x + y - a)$.

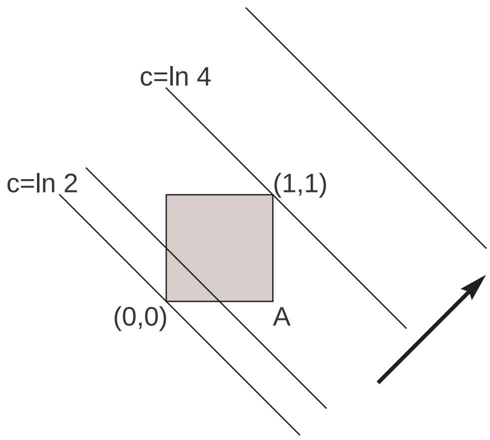
(a) (4 points) Estudie para que valores de a se cumplen las hipótesis del teorema de Weierstrass para la función f en el conjunto A.

(b) (6 points) Considere los casos (i) $a = -2$ y (ii) $a = 0$. Dibuje el conjunto de puntos A y las curvas de nivel de la función f en ambos casos. Usando dicha información, cacule los puntos donde la función f alcanza su máximo y su mínimo global en A. Obtenga el valor de la función f en dichos puntos.

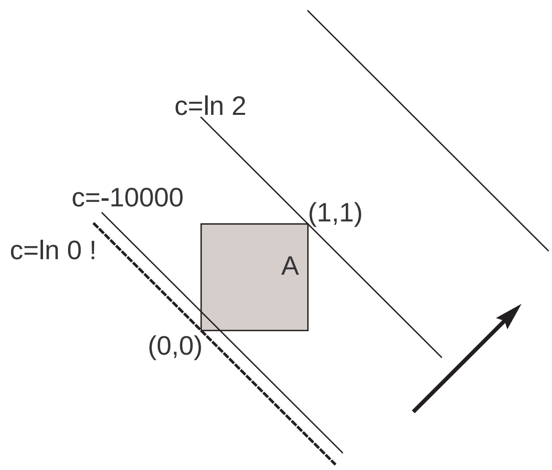
Solución:

(a) A es un conjunto cerrado y acotado (por lo tanto compacto), luego solo necesitamos comprobar que la función f es continua en A. La función logarítmica es continua en su dominio, es decir, en todos los números reales positivos. Por lo cual, necesitamos que se cumpla $x + y - a > 0$ para cualquier $(x, y) \in A$. Como $A = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ necesitaríamos que $a < 0$, así concluimos que se verificarán las condiciones para poder aplicar el teorema siempre que $a < 0$.

(b) $\nabla f(x, y) = (\frac{1}{x+y-a}, \frac{1}{x+y-a})$, por lo tanto la dirección de crecimiento de la función f en cada punto es $(1, 1)$. En el primer caso: (i) $a = -2$, f es cotinua en A, luego los extremos globales existen. El máximo global de f en A se alcanza en en el vértice superior derecho del conjunto A, es decir, en el punto $(1, 1)$ cuyo valor es $\ln 4$. Y el mínimo global se alcanza en $(0, 0)$, siendo su valor $\ln 2$. En el segundo caso: (ii) $a = 0$, f no está definida en $(0, 0) \in A$, y no podemos aplicar el teorema de Weierstrass. De hecho, f no está acotada inferiormente en A, ya que el $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \ln(x + y) = -\infty$ y por lo tanto no existe el mínimo. El máximo global lo obtenemos de la misma forma que en el caso anterior y su valor es $\ln 2$.



Curvas de nivel para $a = -2$



Curvas de nivel para $a = 0$, notad que la línea dicontinua no es una curva de nivel.

$\boxed{3}$

Para $a \in \mathbb{R}$ consideramos la función $f(x,y) = ax^2 + ay^2 + xy + 3x - 3y$.

(a) (4 points) Calcule el valor o los valores de a para los cuales f es estrictamente cóncava o estrictamente convexa.

(b) (6 points) Sea $a = 2$. Calcule los puntos críticos de f y clasifíquelos como máximos y mínimos locales o globales y en puntos de silla.

Solución:

(a) El gradiente de f es $\nabla f(x,y) = (2ax + y + 3, 2ay + x - 3)$ y la matriz Hessiana es

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2a & 1 \\ 1 & 2a \end{pmatrix},$$

la cual no depende de (x,y). Los menores principales son $D_1 = 2a$ y $D_2 = 4a^2 - 1$. Así, tenemos:

- $D_1 > 0$, $D_2 > 0$ si y solo si $a > 0$ y $|a| > \frac{1}{2}$: Definida positiva.
- $D_1 < 0$, $D_2 > 0$ si y solo si $a < 0$ y $|a| > \frac{1}{2}$: Definida negativa.

Por lo tanto, cuando $a > \frac{1}{2}$, f es estrictamente convexa en $\mathbb{R}^2$ y cuando $a < -\frac{1}{2}$, f es estrictamente cóncava en $\mathbb{R}^2$.

(b) Sea $a = 2$. Los puntos críticos de f son las soluciones de $\nabla f(x,y) = (4x+y+3, 4y+x-3) = (0,0)$. Hay una única solución, $(-1,1)$. Y como $a > \frac{1}{2}$, f es estrictamente convexa por el apartado (a), tenemos que $(-1,1)$ es un punto mínimo global estricto para f.

4

Un estudiante tiene que realizar un examen para cada tema A y B, de una misma asignatura. Dispone de 25 horas en total para poder estudiar ambos temas, que puede distribuir a su antojo. La nota de cada examen se expresa con un número del 0 al 10 y la nota final de la asignatura se obtiene mediante la media aritmética de las notas obtenidas en los dos temas. Por ejemplo, si el estudiante obtiene 8 puntos en A y 6 puntos en B su nota final será $\frac{1}{2}(8+6) = 7$. De su experiencia previa el estudiante sabe que si le dedica x horas al tema A obtiene una nota de $10\frac{x}{4+x}$ puntos y si le dedica y horas a estudiar el tema B consigue una nota de $10\frac{y}{1+y}$ puntos.

(a) (5 points) Supongamos que el estudiante desea maximizar su nota final con respecto al tiempo de estudio que dispone. Escriba el problema de Lagrange asociado y encuentre la distribución óptima de los tiempos de estudio (x^*, y^*), así como el valor del multiplicador.

(b) (5 points) ¿Cuál es la nota final máxima? ¿Qué tiempo adicional debería dedicarle al estudio, si el estudiante desea obtener 0,5 puntos más? Dé una respuesta aproximada pero rigurosa basada en la interpretación del multiplicador de lagrange.

Solución:

(a) La función lagrangiana del problema es $L(x, y, \lambda) = \frac{1}{2}(10\frac{x}{4+x} + 10\frac{y}{1+y}) + \lambda(25 - x - y)$, donde λ es el multiplicador asociado a la restricción $x + y = 25$. Las ecuaciones de Lagrange que verifican las condiciones necesarias de primer orden son:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} &= \frac{20}{(4+x)^2} - \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= \frac{5}{(1+y)^2} - \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= 25 - x - y = 0 \end{cases} .$$

Eliminando λ de las dos primeras ecuaciones obtenemos

$$\frac{4}{(4+x)^2} = \frac{1}{(1+y)^2} \Rightarrow 4(1+y)^2 = (4+x)^2 \Rightarrow 2(1+y) = 4 + x \Rightarrow x = 2y - 2.$$

Sustituyendo esta igualdad en la ecuación de la restricción, se obtiene $25-x-y = 25-(2y-2)-y = 27 - 3y = 0$, luego $y = 9$ y $x = 16$. Nótese que el conjunto $\{x+y = 25, x \geq 0, y \geq 0\}$ es un conjunto compacto de puntos. Y como la función objetivo es continua en $\{x \geq 0, y \geq 0\}$, el teorema de Weierstrass garantiza que el máximo global del problema existe. Este tiene que ser la solución $(x^*, y^*) = (16, 9)$, obtenida de las ecuaciones (el mínimo global se alcanza en un punto extremo del segmento $(25, 0)$; el cual no se encuentra utilizando el teorema de Lagrange. ¿Por qué?). El valor del multiplicador es $\lambda = \frac{1}{20} = 0.05$.

(b) La nota final máxima obtenida por el estudiante en el punto óptimo encontrado en el apartado anterior (a) es igual a

$$v^*(\text{time} = 25) = \frac{1}{2}\left(10\frac{x^*}{4+x^*} + 10\frac{y^*}{1+y^*}\right) = \frac{1}{2}\left(10\frac{16}{20} + 10\frac{9}{10}\right) = 5\frac{17}{10} = 8.5$$

puntos(!no está mal!). Para contestar a la última pregunta no necesitamos resolver un nuevo problema de Lagrange. Si no que utilizamos el significado del multiplicador como precio sombra o incremento marginal de la nota final óptima del problema con respecto a una pequeña variación en las unidades de tiempo de que disponemos para el estudio:

$$\Delta v^* = v^*(25 + h) - v^*(25) \approx h \times \lambda.$$

Notad que $v^*(25) = 8.5$ y $\lambda = 0.05$. Necesitamos encontrar h, el número de horas extra que necesitaríamos para alcanzar una nota final de $v^*(25+h) = 9$. Y utilizando la identidad anterior obtenemos

$$9 - 8.5 \approx 0.05h \Rightarrow h = 10.$$

Por lo tanto, en este modelo, para conseguir medio punto más en su nota final el estudiante necesitaría hacer un esfuerzo considerable, dedicandole 10 horas más al estudio.

$\boxed{5}$

Considere las funciones $g(u,v) = \frac{1}{2}\ln(4u^2+v)$, $u = \frac{x-y}{2}$, $v = 2xy$ y $f(x,y) = g(u(x,y), v(x,y))$.

(a) (4 points) Calcule las derivadas $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ utilizando la regla de la cadena (sin hallar la composición inicial de funciones). Ayuda: El resultado final es una expresión que depende solamente de x, y.

(b) (6 points) Calcule la derivada direccional de f en el punto $(1,2)$ en la dirección $(-\frac{2}{5}, \frac{1}{5})$. Es decir, calcule $D_{(-\frac{2}{5},\frac{1}{5})}f(1,2)$. ¿Es $(-\frac{2}{5}, \frac{1}{5})$ la dirección donde f decrece más rápidamente en el punto $(1,2)$?

Solución:

(a) Tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{8u}{2(4u^2+v)}\frac{1}{2} + \frac{1}{2(4u^2+v)}2y = \frac{2u+y}{4u^2+v} = \frac{x}{x^2+y^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{8u}{2(4u^2+v)}\frac{-1}{2} + \frac{1}{2(4u^2+v)}2x = \frac{-2u+y}{4u^2+v} = \frac{y}{x^2+y^2}.$$

(b) Observe que $\nabla f(1,2) = \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$. La dirección de mayor decrecimiento de f en el punto $(1,2)$ es por tanto $-\nabla f(1,2) = -\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$. Por otro lado,

$$D_{(-\frac{2}{5},\frac{1}{5})}f(1,2) = \left(-\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right) \cdot \nabla f(1,2) = \left(-\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right) \cdot \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right) = 0.$$

$\boxed{6}$

Considere la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^4+y^4}, & \text{if } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{if } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) (5 points) Estudie la continuidad de f en $(0,0)$. ¿Es f diferenciable en $(0,0)$?

(b) (5 points) Calcule las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

y la derivada direccional de f en $(0,0)$ en la dirección $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. En otras palabras, calcule $D_{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})} f(0,0)$.

Solución:

(a) f No es continua en $(0,0)$, ya que $f(0,0) = 0$ y el límite direccional en la dirección de la recta $y = x$ es distinto,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=x}} \frac{xy^3}{x^4+y^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4+x^4} = \frac{1}{2}.$$

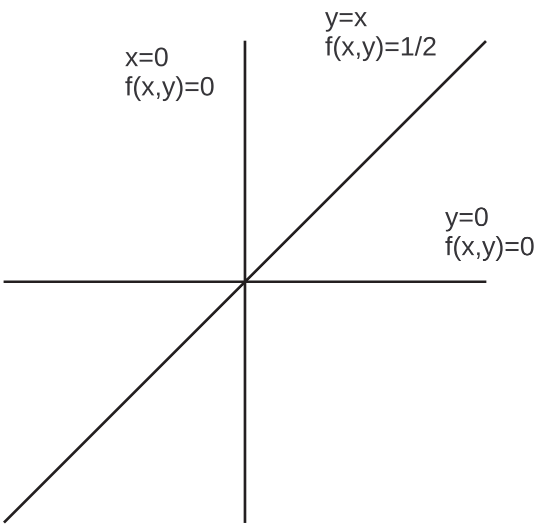
Como consecuencia, f no es diferenciable en $(0,0)$.

(b)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = 0.$$

$$D_{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})} f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}}) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^4}{4}}{\left(\frac{t^4}{4} + \frac{t^4}{4}\right) t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{2t},$$

no existe.



Las curvas de nivel en la figura muestran que f no es contínua en $(0,0)$