(1) *Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función de los parámetros* $a, b \in \mathbb{R}$

$$\left\{\begin{array}{lcl} ax + 2z & = & 2 \\ 5x + 2y & = & 1 \\ x - 2y + bz & = & 3 \end{array}\right.$$

se pide:

(a) *Clasifique el sistema según los valores de a y de b.*

(b) *Resuelva el sistema anterior para los valores de a y b para los cuales el sistema tenga infinitas soluciones.*

Solución:

(a) La matrices asociadas al sistema son

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & b & 3 \end{pmatrix} \overset{\text{Intercambiamos filas 1 y 3}}{\mapsto} \begin{pmatrix} 1 & -2 & b & 3 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ a & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{f_2 \mapsto f_2 - 5f_1 \\ f_3 \mapsto f_3 - af_1}}{\mapsto} \begin{pmatrix} 1 & -2 & b & 3 \\ 0 & 12 & -5b & -14 \\ 0 & 2a & 2 - ab & 2 - 3a \end{pmatrix} \overset{f_3 \mapsto f_3 - \frac{a}{6} \times f_2}{\mapsto} \begin{pmatrix} 1 & -2 & b & 3 \\ 0 & 12 & -5b & -14 \\ 0 & 0 & 2 - \frac{ab}{6} & 2 - \frac{2a}{3} \end{pmatrix}$$

Vemos que si $ab \neq 12$, entonces rango $A = \text{rango}(A|B) = 3$ y el sistema es compatible determinado.
Consideremos ahora el caso en que $ab = 12$. Si, además, $a = 3$, entonces rango $A = \text{rango}(A|B) = 2$ y el sistema es compatible indeterminado con un parámetro.
Finalmente si $a \neq 3$, entonces rango $A = 2 < \text{rango}(A|B) = 3$ y el sistema es incompatible.

(b) El sistema es compatible indeterminado cuando $a = 3$, $b = 4$. Para estos valores, el sistema original es equivalente al sistema

$$\left\{\begin{array}{lcr} x - 2y + 4z & = & 3 \\ 6y - 10z & = & -7 \end{array}\right.$$

cuya solución es $x = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}z$, $y = \frac{5}{3}z - \frac{7}{6}$, $z \in \mathbb{R}$.

(2) *Considere la función*

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 5, & si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(a) *Demuestre que existe el límite* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.
(b) *Determine los puntos donde la función f es continua. Es imprescindible justificar la respuesta.*

Solución:

(a) Sea $\varepsilon>0$. Tomamos $\delta=\varepsilon$. Si $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$, entonces

$$|f(x,y)-f(0x,0)|=\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leq\frac{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sqrt{x^2+y^2}<\delta=\varepsilon$$

Por lo tanto, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

(b) Si $(x,y)\neq(0,0)$ entonces

$$f(x,y)=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

El numerador es un polinomio, que es una función continua. El denominador es la composición de la función $f(z)=\sqrt{z}$ con la función $g(x,y)=x^2+y^2$. Ambas funciones son continuas. Además, el denominador no se anula cuando $(x,y)\neq(0,0)$. Por lo tanto, la función f es continua en todos los puntos $(x,y)\neq(0,0)$. La función no es continua en el punto $(0,0)$ ya que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$ pero $f(0,0)=5$.

(3) *Dada la función* $z = e^{3x-2y}$ *se pide:*

(a) *Estudiar el conjunto de* $\mathbb{R}^2$ *donde la función es convexa.*

(b) *Hallar el polinomio de Taylor de orden 2 de la función en el punto* $p = (0,0)$.

Solución:

(a) Las derivadas primeras y segundas de la función son

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3\,e^{3x-2y} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -2\,e^{3x-2y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 9\,e^{3x-2y} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -6\,e^{3x-2y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -6\,e^{3x-2y} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4\,e^{3x-2y}$$

y por tanto la matriz Hessiana es

$$Hz = e^{3x-2y} \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$$

como $e^{3x-2y} > 0$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $D_1 = 9$ y $D_2 = 0$ la matriz Hessiana es semidefinida positiva en $\mathbb{R}^2$ y la función es convexa en $\mathbb{R}^2$.

(b) El polinomio de Taylor de orden 2 en el punto $(0,0)$ es

$$P_2(x,y) = z(0,0) + \nabla z(0,0) \cdot (x,y) + \frac{1}{2}(x,y)Hz(0,0)(x,y)^t$$

que para nuestra función queda

$$P_2(x,y) = 1 + (3,-2) \cdot (x,y) + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

y operando

$$P_2(x,y) = 1 + 3x - 2y + \frac{9}{2}x^2 - 6xy + 2y^2.$$

(4) *Considere la función $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ y el conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.*

(a) *Halle las ecuaciones de Lagrange que determinan los extremos de f en el conjunto A y obtenga los puntos que satisfacen las citadas ecuaciones.*

(b) *Caracterice las soluciones del apartado anterior en máximos y mínimos locales, utilizando las condiciones de segundo orden. ¿Se puede afirmar que alguno de los máximos o mínimos es global? Justifique adecuadamente las respuestas.*

Solución:

(a) El Lagrangiano es $L = x^2 + 2y^2 + \lambda(1 - x^2 - y^2)$. Las ecuaciones de Lagrange son

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 2x - 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 4y - 2\lambda y = 0 \\ & x^2 + y^2 = 1 \end{aligned}$$

Observemos que las ecuaciones pueden escribirse como

$$\begin{aligned} 2x(1-\lambda) &= 0 \\ 2y(2-\lambda) &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

cuyas soluciones son

$$\begin{aligned} \lambda = 2, &\quad x = 0, y = 1 \\ \lambda = 2, &\quad x = 0, y = -1 \\ \lambda = 1, &\quad x = 1, y = 0 \\ \lambda = 1, &\quad x = -1, y = 0 \end{aligned}$$

(b) La matriz Hessiana es

$$H(x,y;\lambda) = \begin{pmatrix} 2-2\lambda & 0 \\ 0 & 4-2\lambda \end{pmatrix}$$

Para los puntos $\lambda = 2, x = 0, y = 1$ y $\lambda = 2, x = 0, y = -1$ tenemos

$$H(0,1;2) = H(0,-1;2) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos una matriz cuya forma cuadrática asociada semidefinida negativa. Por lo que hay que estudiar el signo de $H(0,1;2)$ en $T_{(0,1)}A$ y el signo de $H(0,-1;2)$ en $T_{(0,-1)}A$. Sea $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Entonces, $T_{(0,1)}A = \{(v_1,v_2) \in \mathbb{R}^2 : \nabla g(0,1) \cdot (v_1,v_2) = 0\} = \{(v_1,v_2) \in \mathbb{R}^2 : (0,2) \cdot (v_1,v_2) = 0\} = \{(v_1,v_2) \in \mathbb{R}^2 : \; v_2 = 0\} = \{(v_1,0) : v_1 \in \mathbb{R}\}$. Análogamente, $T_{(0,-1)}A = \{(v_1,0) : v_1 \in \mathbb{R}\}$. En ambos casos obtenemos que la forma cuadrática restringida es

$$\begin{pmatrix} v_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2v_1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2v_1^2 < 0$$

para todo $v_1 \neq 0$. Por tanto, la forma cuadrática restringida es definida negativa en ambos casos. Concluimos que los puntos $(0,1)$ y $(0,-1)$ son máximos locales de f en el conjunto A.

Para los puntos $\lambda = 1, x = 1, y = 0$, $\lambda = 1, x = -1, y = 0$ tenemos

$$H(1,0;1) = H(-1,0;1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

cuya forma cuadrática asociada es semidefinida positiva. Hay que estudiar el signo de $H(1,0;2)$ en $T_{(1,0)}A$ y el signo de $H(-1,0;2)$ en $T_{(-1,0)}A$. Por una parte, $T_{(1,o)}A = \{(v_1,v_2) \in \mathbb{R}^2 : \nabla g(1,0) \cdot (v_1,v_2) = 0\} = \{(v_1,v_2) \in \mathbb{R}^2 : (2,0) \cdot (v_1,v_2) = 0\} = \{(v_1,v_2) \in \mathbb{R}^2 : \; v_1 = 0\} = \{(0,v_2) : v_2 \in \mathbb{R}\}$. La forma cuadrática asociada a $H(1,0;2)$ restringida a $T_{(1,0)}A$ es

$$\begin{pmatrix} 0 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix} = = 2v_2^2 > 0$$

Para todo $v_2 \neq 0$. Análogamente, $T_{(0,-1)}A = \{(v_1,0) : v_1 \in \mathbb{R}\}$ y la forma cuadrática asociada a $H(-1,0;2)$ en $T_{(-1,0)}A$ es $2v_2^2$. En ambos casos obtenemos que la forma cuadrática restringida es definida positiva. Concluimos que los puntos $(0,-1)$ y $(0,1)$ son mínimos locales de f en el conjunto A.

Como la función f es continua en el conjunto A y el conjunto A es compacto se satisfacen las hipótesis del Teorema de Weierstrass y existen los extremos globales. Al ser todos los puntos factibles regulares, dichos extremos globales se encuentran entre las soluciones de las ecuaciones de Lagrange. Como $f(1,0) = f(-1,0) = 1$, $f(0,1) = f(0,-1) = 2$, vemos que los puntos $(1,0)$ y $(-1,0)$ son mínimos globales y que los puntos $(0,1)$ y $(0,-1)$ corresponden a máximos globales.

(5) *Considere la función* $f(x,y) = 10 - 8x + 2x^2 + 8y - 4xy + x^2y + 2y^2$

(a) *Determine los puntos críticos (si existen) de la función* f *en el conjunto* $\mathbb{R}^2$.

(b) *Clasifique los puntos críticos del apartado anterior en máximos, mínimos (locales y globales) y puntos de silla.*

Solución:

(a) Buscamos los puntos críticos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy + 4x - 4y - 8 = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 - 4x + 4y + 8 = 0$$

De la segunda ecuación, obtenemos que

$$y = \frac{1}{4}\left(-x^2 + 4x - 8\right)$$

Y sustituyendo la expresión anterior de y en la primera ecuación y simplificando obtenemos que

$$\frac{1}{2}x\left(x^2 - 6x + 8\right) = 0$$

De aquí vemos que las soluciones son

$$P_1 = (0,-2), P_2 = (4,-2), P_3 = (2,-1)$$

(b) Para clasificarlos obtenemos la matriz Hessiana:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2y+4 & 2x-4 \\ 2x-4 & 4 \end{pmatrix}$$
$$Hf(0,-2) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

Como el determinante es -16, la forma cuadrática asociada a $Hf(0,-2)$ es indefinida. Concluimos que el punto $(0,-2)$ es un punto de silla.

$$Hf(4,-2) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Como el determinante es -16, la forma cuadrática asociada a $Hf(4,-2)$ es indefinida. Concluimos que el punto $(4,-2)$ es también un punto de silla.

Finalmente,

$$Hf(2,-1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

es definida positiva. Por la tanto el punto $(2,-1) =$ es un mínimo local estricto. No es global porque $f(x,-3) = 4 + 4x - x^2$ y vemos $\lim_{x\to\infty} f(x,-3) = -\infty$.