Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía

Examen final de Matemáticas II. Junio de 2012.

Apellidos:		**Nombre:**
DNI:	**Titulación:**	**Grupo:**

IMPORTANTE

- **DURACIÓN DEL EXAMEN: 2h**
- **NO** se permite el uso de calculadoras.
- **Sólo se entregará este cuadernillo.** Las respuestas deben escribirse en este cuadernillo ya que sólo se puntuará lo que haya en él. Por favor, compruebe que hay 10 páginas en el cuadernillo.
- **NO DESGRAPE LAS HOJAS DEL EXAMEN.**
- Es imprescindible identificarse ante el profesor.
- Lea las preguntas con cuidado. Cada apartado del examen vale 1 punto.
- Hay espacio adicional para operaciones al final del examen y detrás de esta página.

Problema	Puntuación
1	
2	
3	
4	
5	
Total	

(1) *Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales*

$$\left\{\begin{array}{lcl} x-by-2z & = & 1 \\ x-az & = & b \\ x+(2-b)y & = & 1 \end{array}\right.$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) *Clasifique el sistema según los valores de* a *y* b.

(b) *Resuelva el sistema anterior para los valores de* a *y* b *para los cuales el sistema tenga infinitas soluciones.*

Solution:

(a) La matriz ampliada asociada al sistema es

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & -b & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -a & b \\ 1 & 2-b & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -b & -2 & 1 \\ 0 & b & 2-a & b-1 \\ 1 & 2-b & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -b & -2 & 1 \\ 0 & b & 2-a & b-1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -b & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & b & 2-a & b-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -b & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & b & 2-a & b-1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -b & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -a-b+2 & b-1 \end{pmatrix}$$

Estudiamos los posibles rangos de A y los comparamos con los de $(A|B)$. Se observa claramente que, si $a+b \neq 2$, entonces $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|B) = 3$. En estos casos, el sistema es compatible determinado.

Si $a+b=2$ y $b \neq 1$, el sistema es incompatible, ya que $\text{rango}(A) = 2 < rg(A|B) = 3$.

Si i $a+b=2$ y $b=1$, el sistema es compatible indeterminado con un parámetro, ya que $\text{rango}(A) = 2 = rg(A|B)$.

(b) El sistema es compatible indeterminado cuando $a=1, b=1$. Para estos valores, el sistema original es equivalente al sistema

$$\left\{\begin{array}{lcl} x-y-2z & = & 1 \\ y+z & = & 0 \end{array}\right.$$

cuya solución es $y=-z$, $x=1+z$, $z \in \mathbb{R}$.

(2) *Considere la función*

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2\sqrt{|y|}}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

(a) *Determine si la función f es continua en el punto $(0,0)$.*

(b) *Calcule (si existen) las derivadas parciales de f en el punto $(0,0)$. Calcule (si existe) la derivada de f en el punto $(0,0)$ según el vector $v=(1,4)$. ¿Es diferenciable la función f en el punto $(0,0)$?*

Solution:

(a) Si $(x,y)\neq(0,0)$, tenemos

$$|f(x,y)|=\frac{x^2\sqrt{|y|}}{x^2+y^2}=\frac{x^2}{x^2+y^2}\sqrt{|y|}\leq\sqrt{|y|}$$

por lo que para $(x,y)\neq(0,0)$,

$$0\leq|f(x,y)|\leq\sqrt{|y|}$$

La función $h(x,y)=\sqrt{|y|}$ es continua y $\lim_{(x,y)\to(0,0)}h(x,y)=0$. Deducimos por el Teorema del Encaje que $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$, por lo que la función f es continua.

(b) Las derivadas parciales de f en el punto $(0,0)$ son

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{t\to0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{0}{t}=0\\ \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{t\to0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{0}{t}=0\end{aligned}$$

La derivada de f en el punto $(0,0)$ según el vector $v=(1,4)$ es

$$D_vf(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{f(t,4t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{2\sqrt{|t|}}{17t}$$

que no existe. Concluimos que la función no es diferenciable en $(0,0)$.

(3) *Considere la función* $f(x,y) = ax^2 + (a+b)y^2 + 2axy + 2$, *con* $a, b \in \mathbb{R}$

(a) *Estudie la concavidad y convexidad según los valores de* a *y* b.

(b) *Para los valores* $a = 1$, $b = 0$, *¿alcanza* f *un valor máximo y/o mínimo global en* $\mathbb{R}^2$*? ¿En qué puntos? Justifique la respuesta.*

Solution:

(a) La matriz Hessiana es

$$\mathrm{H}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} 2a & 2a \\ 2a & 2(a+b) \end{pmatrix}$$

Los menores principales son $D_1 = 2a$, $D_2 = 4ab$. La función f es convexa si $a > 0$, $b \geq 0$ y cóncava si $a < 0$, $b \leq 0$. Para $a = 0$ la matriz Hessiana es

$$\mathrm{H}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2b \end{pmatrix}$$

que es semidefinida positiva si $b \geq 0$, luego convexa y semidefinida negativa si $b \leq 0$ y por lo tanto cóncava.

(b) Para los valores $a = 1$, $b = 0$, la función es convexa en $\mathbb{R}^2$. Los puntos críticos están determinados por las ecuaciones

$$2x + 2y = 0, \quad 2y + 2x = 0$$

cuya solución es $y = -x$. Como f es convexa y diferenciable, los puntos críticos de f corresponden a mínimos globales de f en $\mathbb{R}^2$. Por lo tanto f alcanza un mínimo global en todos los puntos de la forma $(x, -x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(4) *Considere la función*

$$f(x,y) = xy^2$$

y el conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \leq 100, 2x+y \leq 120\}$.

(a) *Halle las ecuaciones de Kuhn-Tucker que determinan los extremos de* f *en* A *.*

(b) *Obtenga las soluciones de las ecuaciones encontradas en el apartado anterior.*

Solution:

(a) El Lagrangiano es

$$L = xy^2 + \lambda(100 - x - y) + \mu(120 - 2x - y)$$

y las ecuaciones de Kuhn-Tucker son

$$\begin{aligned} y^2 - \lambda - 2\mu &= 0 \\ 2xy - \lambda - \mu &= 0 \\ \lambda(100 - x - y) &= 0 \\ \mu(120 - 2x - y) &= 0 \\ x + y &\leq 100 \\ 2x + y &\leq 120 \end{aligned}$$

con λ, $\mu \geq 0$ para los máximos y λ, $\mu \leq 0$ para los mínimos.

(b) **Caso 1:** $\lambda \neq 0$. Entonces, $x + y = 100$, es decir, $y = 100 - x$. Entonces, $120 - 2x - y = 20 - x$. Por lo que se verifica que $\mu(20 - x) = 0$.
Supongamos que $\mu \neq 0$. Entonces, $x = 20$, $y = 80$. Restando las dos primeras ecuaciones, obtenemos $\mu = y^2 - 2xy = 3200$. De aquí se deduce que $\lambda = y^2 - 2\mu = 0$, que contradice que $\lambda \neq 0$.
Supongamos que $\mu = 0$. Entonces, $y^2 = 2xy$. De la primera ecuación deducimos que $y^2 = \lambda \neq 0$. Por lo tanto, $y = 2x$, que junto con $x + y = 100$, implica que $x = 100/3$, $y = 200/3$. Pero, estos valores no verifican que $2x + y \leq 120$.

Caso 2: $\lambda = 0$. Las ecuaciones de Kuhn-Tucker se reducen a

$$\begin{aligned} y^2 - 2\mu &= 0 \\ 2xy - \mu &= 0 \\ \mu(120 - 2x - y) &= 0 \\ x + y &\leq 100 \\ 2x + y &\leq 120 \end{aligned}$$

con λ, $\mu \geq 0$ para los máximos y λ, $\mu \leq 0$ para los mínimos.
Si $\mu = 0$, entonces $y = 0$ y obtenemos la solución $y = \mu = \lambda = 0$, $x \leq 60$ que son puntos críticos tanto para máximos como mínimos locales. Si $\mu \neq 0$, entonces $y \neq 0$ y $2x + y = 120$. De las dos primeras ecuaciones obtenemos que $y^2 = 4xy$. Por lo que $y = 4x$, que, junto con $2x + y = 120$, implica que la solución es $x = 20$, $y = 80$, $\mu = 3200$, $\lambda = 0$.

(5) *Considere la función*

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

y el conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - 2y + 6 = 0\}$.

(a) *Halle las ecuaciones de Lagrange que determinan los extremos de* f *en* A *y obtenga los puntos que satisfacen las citadas ecuaciones.*

(b) *Caracterice las soluciones del apartado anterior en máximos y mínimos locales, utilizando las condiciones de segundo orden. ¿Se puede afirmar que alguno de los máximos o mínimos es global? (Justifique la respuesta))*

Solution:

(a) La función de Lagrange es

$$L = x^2 + y^2 - \lambda(x - 2y + 6)$$

Las ecuaciones de Lagrange son

$$\begin{aligned} 2x - \lambda &= 0 \\ 2y + 2\lambda &= 0 \\ x - 2y + 6 &= 0 \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} \lambda &= 2x \\ y + \lambda &= 0 \\ x - 2y + 6 &= 0 \end{aligned}$$

Tenemos que resolver el sistema anterior. De la primera ecuación obtenemos

$$x = \frac{\lambda}{2}$$

De la segunda ecuación obtenemos

$$y = -\lambda$$

Sustituyendo en la tercera obtenemos

$$\frac{\lambda}{2} + 2\lambda + 6 = 0$$

y resolviendo obtenemos

$$\lambda = \frac{-12}{5}$$

Por lo tanto,

$$x = \frac{-6}{5}, y = \frac{12}{5}, \lambda = \frac{-12}{5}$$

(b) La matriz hessiana, asociada a L es

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Notamos que $\mathrm{H}\,L$ es definida positiva y por lo tanto el punto critico hallado es un mínimo local estricto. Como la función es convexa (ya que $\mathrm{H}\,f$ es definida positiva), concluimos que se trata de un mínimo global.