Universidad Carlos III de Madrid
Departamento de Economía
Examen final de Matemáticas II. 29 de Junio de 2021.

Apellidos:		Nombre:
DNI:	Titulación:	Grupo:

IMPORTANTE

- **DURACIÓN DEL EXAMEN: 2h**
- **NO** se permite el uso de calculadoras.
- **Sólo se entregará este cuadernillo.** Las respuestas deben escribirse en este cuadernillo ya que sólo se puntuará lo que haya en él. Por favor, compruebe que hay 10 páginas en el cuadernillo.
- **NO DESGRAPE LAS HOJAS DEL EXAMEN.**
- Es imprescindible identificarse ante el profesor.
- Hay espacio adicional para operaciones al final del examen y detrás de esta página.

Problema	Puntuación
1	
2	
3	
4	
5	
Total	

(1) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{cases} bx + y + z = a \\ x + y + 2z = b \\ 2x + y + z = a \end{cases}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ son parámetros.

(a) Clasifique el sistema según los valores de a y b . **10 puntos**

(b) Resuelva el sistema anterior cuando $b = 2$.

10 puntos

(2) Dado el conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 6 - 6x \leq y \leq 6 - x^2 + 5x, y \geq 0\}$$

y la función

$$f(x, y) = (y + 2x)^3$$

(a) Represente el conjunto A , su frontera y su interior y justifique si el conjunto es abierto, cerrado, acotado, compacto o convexo. **10 puntos**

(b) Enuncie el Teorema de Weierstrass. Determine si es posible aplicar el Teorema de Weierstrass a la función f definida en el conjunto A . Utilizando las curvas de nivel, determine (si existen) los puntos extremos globales de f en el conjunto A . **10 puntos**

(3) Considere la función $f(x, y) = c^2y^3 - 6cxy + 3x^2$ con $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$.

(a) Determine los puntos críticos (si existen) de la función f en el conjunto $\mathbb{R}^2$. **10 puntos**

(b) Clasifique los puntos críticos encontrados anteriormente en máximos, mínimos (locales o globales) y/o puntos de silla. **10 puntos**

(4) Considere la ecuación $4xy + 2xz + z^4 = 13$.

(a) Demuestre que la ecuación anterior define de manera implícita a una función diferenciable $z(x, y)$ cerca del punto $(2, 1, 1)$. **10 puntos**

(b) Calcule el polinomio de Taylor de orden 1 de la función $z(x, y)$ (del apartado anterior) en el punto $(2, 1)$. **10 puntos**

(5) Considere los puntos extremos de la función

$$f(x, y) = 4x^2 + 4xy + y^2$$

en el conjunto

$$S = \{(x, y) : x^2y = 4\}$$

(a) Escribe la función Lagrangiana, las ecuaciones de Lagrange y calcule sus soluciones. **10 puntos**

(b) ¿Se cumplen las hipótesis del Teorema de Weierstrass? Determine si alguna de las soluciones de las ecuaciones de Lagrange se corresponde a un máximo o mínimo global. **10 puntos**