Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía

Examen final de Matemáticas II. 29 de Junio de 2021.

Apellidos:		**Nombre:**
DNI:	**Titulación:**	**Grupo:**

IMPORTANTE

- **DURACIÓN DEL EXAMEN: 2h**
- **NO** se permite el uso de calculadoras.
- **Sólo se entregará este cuadernillo.** Las respuestas deben escribirse en este cuadernillo ya que sólo se puntuará lo que haya en él. Por favor, compruebe que hay 10 páginas en el cuadernillo.
- **NO DESGRAPE LAS HOJAS DEL EXAMEN.**
- Es imprescindible identificarse ante el profesor.
- Hay espacio adicional para operaciones al final del examen y detrás de esta página.

Problema	Puntuación
1	
2	
3	
4	
5	
Total	

(1) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{cases} bx + y + z &= a \\ x + y + 2z &= b \\ 2x + y + z &= a \end{cases}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ son parámetros.

(a) Clasifique el sistema según los valores de a y b. **10 puntos**

Solution: *La matriz asociada al sistema es*

$$\begin{pmatrix} b & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 2 & b \\ 2 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Reordenando las filas, obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & b \\ b & 1 & 1 & a \\ 2 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Ahora, realizamos las siguientes operaciones elementales

$$\textit{fila } 2 \mapsto \textit{fila } 2 - b \times \textit{fila } 1$$

$$\textit{fila } 3 \mapsto \textit{fila } 3 - 2 \times \textit{fila } 1$$

para obtener un sistema de ecuaciones equivalente al sistema inicial, dado por la matriz ampliada siguiente

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & b \\ 0 & 1-b & 1-2b & a-b^2 \\ 0 & -1 & -3 & a-2b \end{pmatrix}$$

Intercambiamos las filas 2 y 3,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & b \\ 0 & -1 & -3 & a-2b \\ 0 & 1-b & 1-2b & a-b^2 \end{pmatrix}$$

Finalmente, realizamos la operación elemental fila 3 $\mapsto$ fila 3 + $(1-b) \times$ fila 2 para obtener,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & b \\ 0 & -1 & -3 & a-2b \\ 0 & 0 & b-2 & -(a-b)(b-2) \end{pmatrix}$$

Podemos ver que,

(i) *si $b \neq 2$, tenemos* $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A|b) = 3$. *Para cualquier valor de $a \in \mathbb{R}$, el sistema es compatible determinado con una única solución.*

(ii) *si $b = 2$, la matriz ampliada del sistema es*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & a-4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se cumple, $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A|b) = 2 <$ *número de incognitas. Para cualquier valor de $a \in \mathbb{R}$, el sistema es compatible indeterminado con infinitas soluciones que dependen de un parámetro.*

(b) Resuelva el sistema anterior cuando $b = 2$.

10 puntos

Solution: *En este caso tenemos que el sistema lineal de ecuaciones propuesto es equivalente al siguiente sistema,*

$$\begin{cases} x + y + 2z &= 2 \\ -y - 3z &= a - 4 \end{cases}$$

La solución es

$$z \in \mathbb{R}, \quad x = a + z - 2, \quad y = 4 - a - 3z$$

(2) Dado el conjunto

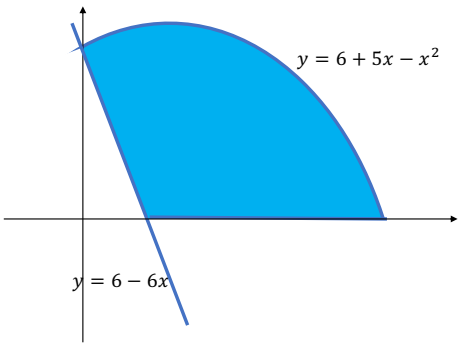
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 6 - 6x \leq y \leq 6 - x^2 + 5x, \;\; y \geq 0\}$$

y la función

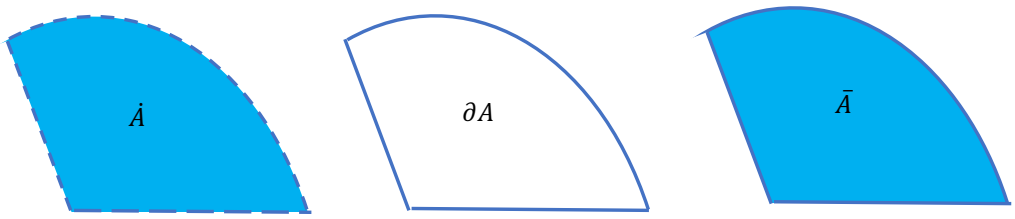
$$f(x, y) = (y + 2x)^3$$

(a) Represente el conjunto A, su frontera y su interior y justifique si el conjunto es abierto, cerrado, acotado, compacto o convexo. **10 puntos**

Solution: *El conjunto A se representa aproximadamente como la figura (azul) en la siguiente imagen.*



Su interior, clausura y frontera son:



El conjunto A es cerrado al cumplir $\partial A \subset A$. No es abierto porque $A \cap \partial A \neq \emptyset$. Es acotado y por lo tanto el conjunto A es compacto. También es un conjunto convexo al ser el conjunto A la intersección de tres conjuntos convexos: $A = B \cap C \cap D$ con

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 6 - 6x\}$$

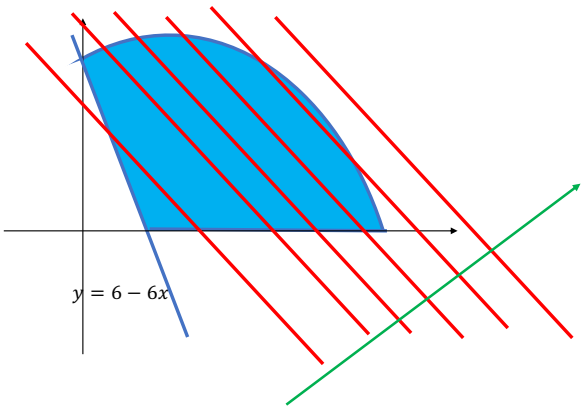
y

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 6 + 5x - x^2\}$$

La función $g(x) = 6 + 5x - x^2$ es una función cóncava y por lo tanto D es un conjunto convexo. Los conjuntos B y C son dos semiplanos cerrados y por lo tanto también son conjuntos convexos. (La intersección de conjuntos convexos es un conjunto convexo)

(b) Enuncie el Teorema de Weierstrass. Determine si es posible aplicar el Teorema de Weierstrass a la función f definida en el conjunto A. Utilizando las curvas de nivel, determine (si existen) los puntos extremos globales de f en el conjunto A. **10 puntos**

Solution: *El conjunto A es compacto. La función $f(x, y) = (y + 2x)^3$ es continua en todo su dominio de definición $D(f) = \mathbb{R}^2$. Por lo tanto, se cumple el teorema de Weierstrass y sabemos que la función f alcanza un máximo y un mínimo valor sobre el conjunto A. Las curvas de nivel de la función f vienen dadas por la ecuación $y + 2x = c$, $c > 0$, y por lo tanto son láneas rectas paralelas de la forma $y = c - 2x$ con $c \in \mathbb{R}$. En la figura representamos las curvas de nivel en color rojo. La flecha nos indica la dirección de crecimiento de la función f.*



Graficamente, podemos observar que el mínimo valor de la función se alcanza en el punto $(1, 0)$. *El máximo se alcanza en el punto* (a, b) *perteneciente a la gráfica de la función* $h(x) = 6 - x^2 + 5x$ *donde la recta tangente tiene como pendiente el valor* -2. *Como* $h'(x) = -2x + 5$, *se tiene que cumplir* $-2a + 5 = -2$. *Y por lo tanto,* $a = 7/2$, $b = h(7/2) = 45/4$.

(3) Considere la función $f(x,y) = c^2y^3 - 6cxy + 3x^2$ con $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$.

(a) Determine los puntos críticos (si existen) de la función f en el conjunto $\mathbb{R}^2$. **10 puntos**

Solution: *El gradiente de f es*

$$\big(6x - 6cy, 3c^2y^2 - 6cx\big)$$

Los puntos críticos están determinados por las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} 0 &= 6x - 6cy \\ 0 &= 3c^2y^2 - 6cx \end{aligned}$$

Como, $c \neq 0$, los puntos críticos son $(0,0)$, $(2c,2)$.

(b) Clasifique los puntos críticos encontrados anteriormente en máximos, mínimos (locales o globales) y/o puntos de silla. **10 puntos**

Solution: *La matriz Hessiana es*

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6 & -6c \\ -6c & 6c^2y \end{pmatrix}$$

Evaluando en los puntos críticos vemos que

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} 6 & -6c \\ -6c & 0 \end{pmatrix}$$

Como, $\det(H(0,0)) = -36c^2 < 0$, el punto crítico $(0,0)$ es un punto de silla. Por otro lado,

$$H(2c,2) = \begin{pmatrix} 6 & -6c \\ -6c & 12c^2 \end{pmatrix}$$

Y observamos que $D_1 = 6 > 0$ y $D_2 = 36c^2 > 0$. Por lo tanto concluimos que el punto $(2c,2)$ es un mínimo local.
Además, $f(0,y) = c^2y^3$ y podemos comprobar que $\lim_{y\to\infty} f(0,y) = +\infty$, $\lim_{y\to-\infty} f(0,y) = -\infty$ y por lo tanto sabemos que no existe ni máximo ni mínimo global.

(4) Considere la ecuación $4xy + 2xz + z^4 = 13$.

(a) Demuestre que la ecuación anterior define de manera implícita a una función diferenciable $z(x, y)$ cerca del punto $(2, 1, 1)$. **10 puntos**

Solution: *Sea* $f(x, y, z) = 4xy + 2xz + z^4 = 13$. *Como,*

$$\frac{\partial f}{\partial z}(2, 1, 1) = 2x + 4z^3\big|_{x=2,y=1,z=1} = 8$$

por el teorema de la función implícita, la ecuación $4xy+2xz+z^4 = 13$ *define a* z *como una función diferenciable de variables independientes* x *e* y*, en un vecindario del punto* $(2, 1)$.

(b) Calcule el polinomio de Taylor de orden 1 de la función $z(x, y)$ (del apartado anterior) en el punto $(2, 1)$. **10 puntos**

Solution: *Derivando implícitamente la ecuación* $4xy+2xz+z^4 = 13$ *con respecto a las variables* x *e* y *obtenemos*

$$\begin{aligned} 4\frac{\partial z}{\partial x}z^3 + 2x\frac{\partial z}{\partial x} + 2z + 4y &= 0 \\ 4\frac{\partial z}{\partial y}z(2,1)^3 + 4\frac{\partial z}{\partial y} + 8 &= 0 \end{aligned}$$

sustituyendo ahora en el punto $x = 2, y = 1, z(2, 1) = 1$ *obtenemos las ecuaciones*

$$\begin{aligned} 8\frac{\partial z}{\partial x}(2,1) + 6 &= 0 \\ 8\frac{\partial z}{\partial y}(2,1) + 8 &= 0 \end{aligned}$$

por lo que obtenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x}(2,1) = -\frac{3}{4}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(2,1) = -1$$

Por lo tanto, el polinomio de Taylor de orden 1 de la función $z(x, y)$ *en el punto* $(2, 1)$ *es*

$$P_1(x, y) = 1 - \frac{3}{4}(x - 2) - (y - 1) = \frac{7}{2} - \frac{3x}{4} - y$$

(5) Considere los puntos extremos de la función

$$f(x,y) = 4x^2 + 4xy + y^2$$

en el conjunto

$$S = \{(x,y) : x^2 y = 4\}$$

(a) Escribe la función Lagrangiana, las ecuaciones de Lagrange y calcule sus soluciones. **10 puntos**

Solution: *La función Lagrangiana es*

$$\mathcal{L}(x,y) = 4x^2 + 4xy + y^2 - \lambda\left(x^2 y - 4\right)$$

Y las ecuaciones de Lagrange son

$$\begin{aligned} 8x + 4y - 2\lambda xy &= 0 \\ 4x + 2y - \lambda x^2 &= 0 \\ x^2 y &= 4 \end{aligned}$$

Observe que $x = 0$ no es parte de la solución. Si asumimos que se cumple $x \neq 0$. Las ecuaciones anteriores se pueden reescribir como

$$\begin{aligned} 8x + \frac{16}{x^2} - \frac{8\lambda}{x^2} &= 0 \\ 4x + \frac{8}{x^2} - \lambda x^2 &= 0 \\ y &= \frac{4}{x^2} \end{aligned}$$

Esto es

$$\begin{aligned} 8x^3 + 16 - 8\lambda x &= 0 \\ 4x^3 + 8 - \lambda x^4 &= 0 \\ y &= \frac{4}{x^2} \end{aligned}$$

Dividiendo la primera ecuación por 2 obtenemos

$$\begin{aligned} 4x^3 + 8 - 4\lambda x &= 0 \\ 4x^3 + 8 - \lambda x^4 &= 0 \\ y &= \frac{4}{x^2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $4\lambda x = \lambda x^4$. Una solución es

$$x = -2^{1/3}, \quad y = 2 \times 2^{1/3}, \quad \lambda = 0$$

Por otro lado, obtenemos $4 = x^3$. Así,

$$x = 4^{1/3}, \quad y = 4^{1/3}, \quad \lambda = 3 \times 2^{1/3}$$

observe que

$$f\left(-2^{1/3}, 2 \times 2^{1/3}\right) = 0, \quad f\left(4^{1/3}, 4^{1/3}\right) = 18 \times 2^{1/3}$$

(b) ¿Se cumplen las hipótesis del Teorema de Weierstrass? Determine si alguna de las soluciones de las ecuaciones de Lagrange se corresponde a un máximo o mínimo global. **10 puntos**

Solution: *El conjunto S no es compacto. Por lo tanto el Teorema de Weierstrass no se puede aplicar. Por otro lado, tenemos que $f(x,y) = 4x^2 + 4xy + y^2 = (2x+y)^2 \geq 0$. Por lo tanto, el punto $\left(-2^{1/3}, 2 \times 2^{1/3}\right)$ se corresponde con un mínimo global. Además, tomando $y = 4/x^2$ obtenemos*

$$\lim_{x \to \infty} f\left(x, \frac{4}{x^2}\right) = \infty$$

por lo que no existe máximo global.