Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía

Examen final de Matemáticas II. 17 de mayo de 2019.

(1) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x - y + z & = & 3 \\ x - y + z & = & 2 \\ 3x - y - az & = & b \end{array}\right.$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ son parámetros.

(a) Clasifique el sistema según los valores de a y b. **5 puntos**

Solution: *La matriz asociada al sistema es*

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -a & b \end{pmatrix}$$

Intercambiando las filas 1 y 2 obtenemos

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -a & b \end{pmatrix}$$

Ahora hacemos las siguientes operaciones

$$\textit{fila 2} \mapsto \textit{fila 2} - 2 \times \textit{fila 1}$$

$$\textit{fila 3} \mapsto \textit{fila 3} + 3 \times \textit{fila 1}$$

Y obtenemos que el sistema original es equivalente a otro sistema cuya matriz aumentada es la siguiente

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -a-3 & b-6 \end{pmatrix}$$

Ahora hacemos fila 3 $\mapsto$ *fila 3* $- 2 \times$ *fila 2 y obtenemos*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -a-1 & b-4 \end{pmatrix}$$

Vemos que

(i) *Si* $a \neq -1$ *el sistema is compatible con solución única.*

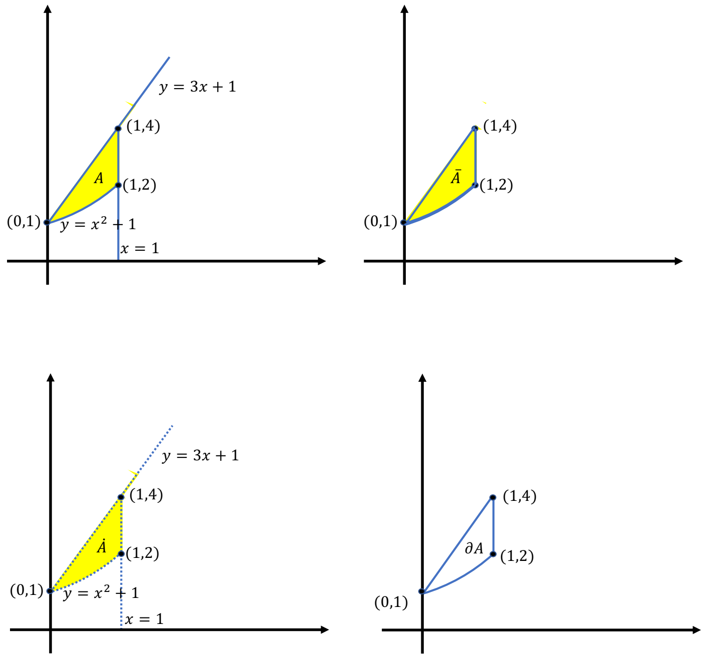
(ii) *Si* $a = -1$ *el sistema is compatible si y sólo si* $b = 4$. *En este último caso, el sistema es compatible indeterminado con un parámetro.*

(b) Resuelva el sistema de ecuaciones para los valores $a = -1$, $b = 4$. **3 puntos**

Solution: *El sistema anterior es equivalente al siguiente sistema de ecuaciones lineales*

$$\left\{\begin{array}{lcr} x - y + z & = & 2 \\ y - z & = & -1 \end{array}\right.$$

Eligiento z *como el parámetro, el conjunto de soluciones es* $\{(1, z-1, z) : z \in \mathbb{R}\}$.



(2) Considere el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x^2 + 1 \leq y \leq 3x + 1\}$ y la función

$$f(x, y) = \sqrt{\log(x + y)}$$

definida en el conjunto A.

(a) Dibuje el conjunto A y justifique si es abierto, cerrado, acotado, compacto o convexo. $\boxed{\textbf{5 puntos}}$

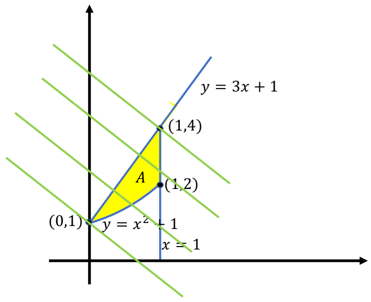
Solution: *El conjunto A está dibujado de manera aproximada en la figura. Es cerrado porque $\partial A \subset A$. No es abierto porque $A \cap \partial A \neq \emptyset$. Está acotado. Por lo tanto, el conjunto A es compacto. Es convexo.*

(b) Enuncie el teorema Weierstrass. Determine si es posible aplicar este teorema a la función f definida en el conjunto A. Utilizando las curvas de nivel, determine (en caso de que existan) los puntos extremos globales de la función f en el conjunto A. $\boxed{\textbf{5 puntos}}$

Solution: *Como, $x + y > 0$ en el conjunto A, la función $f(x, y) = \sqrt{\log(x + y)}$ es continua y se verifican las hipótesis del teorema de Weierstrass. La función f alcanza un valor máximo y un valor mínimo en A*

Las curvas de nivel son de la forma $x + y = c$. En la figura, las curvas de nivel se han representado en color verde.

Gráficamente, vemos que el valor máximo se alcanza en el punto $(1, 4)$ y el valor mínimo se alcanza en el punto $(0, 1)$.



(3) Considere la función $f(x, y) = 2x + y - \ln x - \ln y$.

(a) Determine su dominio y las regiones de $\mathbb{R}^2$ donde la función es cóncava o convexa. **5 puntos**

Solution: *El dominio de la función is* $Dom(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$ *El gradiente de la función es*

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \dfrac{1}{x} & 1 - \dfrac{1}{y} \end{pmatrix}$$

Obtenemos la matriz Hessiana

$$Hf(x, y) \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \\ \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{x^2} & 0 \\ \\ 0 & \dfrac{1}{y^2} \end{pmatrix}$$

La forma cuadrática asociada es definida positiva. Esto se siguen de los menores principales dominantes

$$D_1 = \frac{1}{x^2}, \quad D_2 = \frac{1}{x^2 y^2}$$

Por lo tanto, $D_1 > 0$ *and* $D_2 > 0$ *en todos los puntos de* $\mathbb{R}^2$. *Por lo tanto,* Hf *es definida positiva en el dominio de* f. *Concluimos que* f *es estrictamente convexa en su dominio.*

(b) Estudie la existencia de extremos globales de la función f en su dominio. **5 puntos**

Solution: *Los puntos críticos son la solución de las ecuaciones*

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \dfrac{1}{x} & 1 - \dfrac{1}{y} \end{pmatrix} = (0, 0)$$

El único punto crítico es $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$. *Como la función* f *es estrictamente convexa, el único punto crítico es el (único) mínimo global de* f *en su dominio.*

(4) Considere el conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned} x^2y + ze^y &= -1 \\ x - y + z &= 0 \end{aligned}$$

(a) Demuestre que el anterior sistema de ecuaciones determina implícitamente dos funciones diferenciables $y(x)$ y $z(x)$ en un entorno del punto $(x, y, z) = (1, 0, -1)$. $\boxed{\textbf{3 puntos}}$

Solution: *Las funciones $f_1(x, y, z) = x^2y + ze^y - 1$ and $f_2(x, y, z) = x - y + z$ son de clase C^∞. Calculamos*

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{vmatrix}_{(x,y,z)=(1,0,-1)} = \begin{vmatrix} x^2 + ze^y & e^y \\ -1 & 1 \end{vmatrix}_{(x,y,z)=(1,0,-1)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Por el teorema de la función implícita, el sistema de ecuaciones anterior determina dos funciones diferenciables $y(x)$ and $z(x)$ en un entorno del punto $(x, y, z) = (1, 0, -1)$.

(b) Calcule

$$y'(1), z'(1)$$

y el polinomio de Taylor de orden uno de las funciones $y(x)$ y $z(x)$ en el punto $x_0 = 1$. $\boxed{\textbf{5 puntos}}$

Solution: *Derivando implícitamente respecto a x,*

$$\begin{aligned} 2xy + x^2y' + e^yzy' + e^yz' &= 0 \\ 1 - y' + z' &= 0 \end{aligned}$$

Ahora sustituimos los valores $(x, y, z) = (1, 0, -1)$ y obtenemos

$$\begin{aligned} z'(1) &= 0 \\ 1 - y'(1) + z'(1) &= 0 \end{aligned}$$

So,

$$z'(1) = 0, \quad y'(1) = 1$$

Por lo tanto, el polinomio de Taylor's de orden 1de la función $y(x)$ en el punto $x_0 = 1$ es

$$P_1(x) = y(1) + y'(1)(x - 1) = x - 1$$

y el polinomio de Taylor's de orden 1 de la función $z(x)$ en el punto $x_0 = 1$ es

$$Q_1(x) = z(1) + z'(1)(x - 1) = -1$$

(5) Considere la función $f(x,y) = 3axy - x^3 - y^3$, donde $a \neq 0$ es un parámetro.

(a) Determine los puntos críticos de f en el conjunto $\mathbb{R}^2$. **5 puntos**

(b) Clasifique, de acuerdo a los valores del parámetro a, los puntos críticos de f. **5 puntos**

(c) Determine el valor del parámetro a para el cual hay un máximo local donde la función f alcanza el valor 8 y el valor del parámetro a para el cual hay un mínimo local donde la función f. alcanza el valor -1. **5 puntos**

Solution:

(a) *El vector gradiente de f es*

$$\nabla f(x,y) = (3ay - 3x^2, 3ax - 3y^2)$$

Los puntos críticos son soluciones del sistema de ecuaciones

$$3ay - 3x^2 = 0, 3ax - 3y^2 = 0$$

Las soluciones son

$$(0,0) \quad y \quad (a,a)$$

(b) *La matriz Hessiana es*

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -6x & 3a \\ 3a & -6y \end{pmatrix}$$

En el punto $(0,0)$ obtenemos

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 3a \\ 3a & 0 \end{pmatrix}$$

Con lo que $D_2 = -9a^2 < 0$. La forma cuadrática asociada es indefinida. El punto $(0,0)$ es un punto de silla. En el punto (a,a) obtenemos

$$Hf(a,a) = \begin{pmatrix} -6a & 3a \\ 3a & -6a \end{pmatrix}$$

con lo que $D_1 = -6a$, $D_2 = 27a^2 > 0$.

(i) *Si $a < 0$, la forma cuadrática asociada es definida positiva. El punto (a,a) corresponde a un mínimo local.*

(ii) *Si $a > 0$, la forma cuadrática asociada es definida negativa. El punto (a,a) corresponde a un máximo local.*

Como,

$$\lim_{x\to\infty} f(x,0) = -\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x,0) = \infty$$

los puntos anteriores no son extremos globales.

(c) *El valor de la función en el punto a es*

$$f(a,a) = a^3$$

(i) *Si $a = 2$, el punto $(2,2)$ corresponde a un mínimo local y $f(2,2) = 8$.*

(ii) *Si $a = -1$, el punto $(-1,-1)$ corresponde a un máximo local y $f(-1,-1) = -1$.*

(6) Considere las funciones $f(x, y) = xy$ and $g(x, y) = x^2 + y^2 - 8$ y el conjunto $S = \{(x, y) : g(x, y) = 0\}$.

(a) Explique por qué $f(x, y)$ alcanza un máximo global en el conjunto S. **2 puntos**

(b) Utilizando el método de Lagrange encuentre el máximo global de f $f(x, y)$ en el conjunto S. **7 puntos**

Solution:

(a) *El conjunto es cerrado porque coincide con su frontera. Además es acotado. Por lo tanto, es compacto. La función f es un polinomio y, por tanto continua. Como A es compacto, el resultado es consecuencia del teorema de Weierstrass.*

(b) *La función f es de clase C^1 y se verifica la condición de regularidad porque $\nabla g(x, y) = (2x, 2y)$ y $(0, 0) \notin S$. Los puntos extremos satisfacen las condiciones necesarias de primer orden. El Lagrangiano es La condiciones necesarias de primer orden son :*

$$\mathcal{L}_x(x, y) = \quad y - 2\lambda x = 0 \tag{1}$$

$$\mathcal{L}_y(x, y) = \quad x - 2\lambda y = 0 \tag{2}$$

$$x^2 + y^2 - 8 = 0 \tag{3}$$

Restando las dos ecuaciones primeras, obtenemos $(y - x)(1 - 2\lambda) = 0$. Si $x = y$, entonces la condición (3) implica que $2x^2 = 8$ y los candidatos a puntos extremos son $(2, 2)$ y $(-2, -2)$. Si $x \neq y$, entonces $\lambda = -1/2$. De la ecuación (1) deducimos que $y = -x$. En este caso, los candidatos a puntos extremos son $(-2, 2)$ y $(2, -2)$.

Como $f(2, -2) = f(-2, 2) = -4$ y $f(2, 2) = f(-2, -2) = 4$, el máximo global se alcanza en los puntos $(2, 2)y, (-2, -2)$.