

- (1) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{cases} x + 3y - az &= 4 \\ 2x - 3y + 2z &= 2 \\ 3x + az &= b \end{cases}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$.

- (a) **(20 puntos)** Clasifique el sistema según los valores de $a, b \in \mathbb{R}$.
 (b) **(10 puntos)** Resuelva el sistema de ecuaciones para los valores de a y b para los cuales el sistema de ecuaciones tienen infinitas soluciones.
- (2) Considere el conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - x^2 + x \geq 0, \quad y - x - 3 \geq 0\}$$

y la función

$$f(x, y) = y - 2x$$

- (a) **(20 puntos)** Dibuje el conjunto A , su frontera y su interior. Justifique si el conjunto A es abierto, cerrado, acotado, compacto o convexo.
 (b) **(10 puntos)** Enuncie el teorema de Weierstrass. Determine si es posible aplicar el teorema de Weierstrass a la función f definida en el conjunto A .
 (c) **(10 puntos)** Dibuje las curvas de nivel de la función f , indicando la dirección de crecimiento de la función.
 (d) **(20 puntos)** Utilizando las curvas de nivel de la función f , determine (en caso de que existan) los puntos extremos globales de la función f en el conjunto A .

- (3) Considere el conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned} 3xy + y^2 + z^2 &= 1 \\ x^2 + yz &= 1 \end{aligned}$$

- (a) **(10 puntos)** Demuestre que el anterior sistema de ecuaciones determina implícitamente dos funciones diferenciables $y(x)$ y $z(x)$ en un entorno del punto $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, -1)$.
 (b) **(20 puntos)** Calcule

$$y'(x), \quad z'(x)$$

en el punto $x_0 = 1$.

- (c) **(20 puntos)** Calcule

$$y''(x), \quad z''(x)$$

en el punto $x_0 = 1$.

- (4) Clasifique la forma cuadrática $Q(x, y, z) = c^2x^2 - 2cxz + x^2 - 2xy - 2xz + y^2 + 2yz + 2z^2$ en función del valor de $c \in \mathbb{R}$. **(30 puntos)**

- (5) Considere los puntos extremos de la función

$$f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 3y$$

en el conjunto

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - y = 4\}$$

- (a) **(10 puntos)** Escriba la función Lagrangiana y las ecuaciones de Lagrange.
 (b) **(20 puntos)** Encuentre las soluciones de las ecuaciones de Lagrange.
 (c) **(20 puntos)** Utilice las condiciones de segundo orden para determinar si las soluciones de las ecuaciones de Lagrange corresponden a un valor máximo o mínimo local de la función f en el conjunto S .
 (d) **(20 puntos)** ¿Alguna de las soluciones de las ecuaciones de Lagrange corresponde a un valor máximo o mínimo global de f en el conjunto S ?