Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía

Examen final de Matemáticas II. 19 de mayo de 2023.

---

(1) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\left\{\begin{array}{rcl} -x+ay+2z & = & a \\ 2x+ay-z & = & 2 \\ ax+2z & = & a \end{array}\right.$$

donde $a \in \mathbb{R}$.

(a) **(20 puntos)** Clasifique el sistema según los valores de a.

(b) **(10 puntos)** Resuelva el sistema de ecuaciones para los valores de a para los que el sistema sea compatible.

(2) Considere el conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 10 \leq y \leq 10 - \frac{2x^2}{5}\}$$

y la función

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

(a) **(20 puntos)** Dibuje el conjunto A, su frontera y su interior. Justifique si el conjunto A es abierto, cerrado, acotado, compacto o convexo.

(b) **(10 puntos)** Enuncie el teorema de Weierstrass. Determine si es posible aplicar el teorema de Weierstrass a la función f definida en el conjunto A.

(c) **(10 puntos)** Dibuje las curvas de nivel de la función f, indicando la dirección de crecimiento de la función.

(d) **(20 puntos)** Utilizando las curvas de nivel de la función f, determine (en caso de que existan) los puntos extremos globales de la función f en el conjunto A.

(3) Considere la función $f(x, y) = 5x^3 - 2xy - x + 3y^2 - \frac{4y}{3}$.

(a) **(10 puntos)** Determine los puntos críticos de la función f en el conjunto $\mathbb{R}^2$.
Sugerencia: $\sqrt{784} = 28$.

(b) **(20 puntos)** Clasifique los puntos críticos calculados en el apartado anterior en máximos/mínimos (locales o globales) y puntos de silla.

(c) **(10 puntos)** Determine el mayor subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ donde la función f es convexa.

(d) **(10 puntos)** Determine todas las soluciones locales y globales del problema siguiente

$$\begin{array}{rc} \max / \min & f(x, y) = 5x^3 - 2xy - x + 3y^2 - \frac{4y}{3} \\ \text{en el conjunto} & A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > \frac{1}{4}\right\} \end{array}$$

(4) Considere el conjunto de ecuaciones

$$\begin{array}{rcl} x^3 + 5xy + z^2 & = & 2 \\ xz + 2yz & = & -1 \end{array}$$

(a) **(10 puntos)** Demuestre que el anterior sistema de ecuaciones determina implícitamente dos funciones diferenciables $y(x)$ y $z(x)$ en un entorno del punto $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, -1)$.

(b) **(20 puntos)** Calcule

$$y'(x), \quad z'(x)$$

en el punto $x_0 = 1$.

(c) **(10 puntos)** Calcule el polinomio de Taylor de orden 1 de las funciones $y(x)$ y $z(x)$ en el punto $x_0 = 1$.

(5) Considere los puntos extremos de la función

$$f(x, y) = x^3 - x + y^2 + 2$$

en el conjunto

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 - 4x + 2y^2 = 0\}$$

(a) **(10 puntos)** Escriba la función Lagrangiana y las ecuaciones de Lagrange.

(b) **(20 puntos)** Encuentre las soluciones de las ecuaciones de Lagrange.

(c) **(20 puntos)** Utilice las condiciones de segundo orden para determinar si las soluciones de las ecuaciones de Lagrange corresponden a un valor máximo o mínimo local de la función f en el conjunto S.

(d) **(10 puntos)** ¿Alguna de las soluciones de las ecuaciones de Lagrange corresponde a un valor máximo o mínimo global de f en el conjunto S?