

- (1) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ ax + (1 + a)y + z = 2 \\ x + by + bz = 1 + b \end{cases}$$

donde $a \in \mathbb{R}$.

- (a) **(20 puntos)** Clasifique el sistema según los valores de $a, b \in \mathbb{R}$.
 (b) **(10 puntos)** Resuelva el sistema de ecuaciones para los valores de $a = 2$ y $b = 1$.
 (2) Considere el conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9, x > 0, y > 0\}$$

y la función

$$f(x, y) = 3x + 4y$$

- (a) **(20 puntos)** Dibuje el conjunto A , su frontera y su interior. Justifique si el conjunto A es abierto, cerrado, acotado, compacto o convexo.
 (b) **(10 puntos)** Enuncie el teorema de Weierstrass. Determine si es posible aplicar el teorema de Weierstrass a la función f definida en el conjunto A .
 (c) **(10 puntos)** Dibuje las curvas de nivel de la función f , indicando la dirección de crecimiento de la función.
 (d) **(20 puntos)** Utilizando las curvas de nivel de la función f , determine (en caso de que existan) los puntos extremos globales de la función f en el conjunto A .

- (3) Considere el conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned} x^2 + 2xy + z^2 + 3 &= 0 \\ y^2 + xz &= 4 \end{aligned}$$

- (a) **(10 puntos)** Demuestre que el anterior sistema de ecuaciones determina implícitamente dos funciones diferenciables $y(x)$ y $z(x)$ en un entorno del punto $(x_0, y_0, z_0) = (-1, 2, 0)$.
 (b) **(20 puntos)** Calcule

$$y'(x), \quad z'(x)$$

 en el punto $x_0 = -1$.
 (c) **(10 puntos)** Calcule el polinomio de Taylor de orden 1 de las funciones $y(x)$ y $z(x)$ en el punto $x_0 = -1$.
 (4) Clasifique la forma cuadrática $Q(x, y, z) = axz + x^2 + 4xy + 5y^2 + 6yz + 2z^2$ en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$. **(20 puntos)**

- (5) Considere los puntos extremos de la función

$$f(x, y, z) = x^3 + y + z^2$$

en el conjunto

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 2z^2 = 4, \quad x + y = 2\}$$

- (a) **(10 puntos)** Escriba la función Lagrangiana y las ecuaciones de Lagrange.
 (b) **(20 puntos)** Encuentre las soluciones de las ecuaciones de Lagrange.
 (c) **(20 puntos)** Utilice las condiciones de segundo orden para determinar si las soluciones de las ecuaciones de Lagrange corresponden a un valor máximo o mínimo local de la función f en el conjunto S .
 (d) **(10 puntos)** ¿Alguna de las soluciones de las ecuaciones de Lagrange corresponde a un valor máximo o mínimo global de f en el conjunto S ?