Universidad Carlos III de Madrid

**Departamento de Economía**

**Examen final de Matemáticas II. 28 de junio de 2023.**

---

(1) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{cases} x+y+z &= a \\ ax+(1+a)y+z &= 2 \\ x+by+bz &= 1+b \end{cases}$$

donde $a \in \mathbb{R}$.

(a) **(20 puntos)** Clasifique el sistema según los valores de $a, b \in \mathbb{R}$.

**Solución:** *La matriz ampliada asociada al sistema es*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ a & a+1 & 1 & 2 \\ 1 & b & b & b+1 \end{pmatrix}$$

*Hacemos las operaciones siguientes*

$$\begin{aligned} \textit{fila 2} &\mapsto \textit{fila 2} - a \times \textit{fila 1} \\ \textit{fila 3} &\mapsto \textit{fila 3} - \textit{fila 1} \end{aligned}$$

*Y obtenemos que el sistema original es equivalente a otro cuya matriz aumentada es*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1-a & 2-a^2 \\ 0 & b-1 & b-1 & 1-a+b \end{pmatrix}$$

*Ahora hacemos fila 3* $\mapsto$ *fila 3* $-(b-1)$*fila 2 y obtenemos*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1-a & 2-a^2 \\ 0 & 0 & a(b-1) & a^2(b-1)-a-b+3 \end{pmatrix}$$

*Así vemos que*

(i) *si* $a \neq 0$ *y* $b \neq 1$, *entonces* $\operatorname{rango} A = \operatorname{rango}(A|b) = 3$. *El sistema es compatible determinado.*

(ii) *Si* $a = 0$, *entonces la el sistema original es equivalente a otro sistema cuya matriz ampliada es*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3-b \end{pmatrix}$$

*Por lo que si* $a = 0$ *y* $b \neq 3$, *entonces* $\operatorname{rango} A = 2 < \operatorname{rango}(A|b) = 3$ *y el sistema es incompatible. Mientras que si* $a = 0$ *y* $b = 3$, *Vemos que* $\operatorname{rango} A = \operatorname{rango}(A|b) = 2$ *y el sistema es compatible indeterminado con* 1 *parámetro.*

(iii) *Finalmente, si* $b = 1$, *entonces el sistema original es equivalente a otro sistema cuya matriz ampliada es*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1-a & 2-a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix}$$

(b) **(10 puntos)** Resuelva el sistema de ecuaciones para los valores de $a = 2$ y $b = 1$.

**Solución:** *El sistema es equivalente a otro sistema cuya matriz ampliada es*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*La solución es*

$$x = 4-2z, \quad y = z-2, \quad z \in \mathbb{R}$$

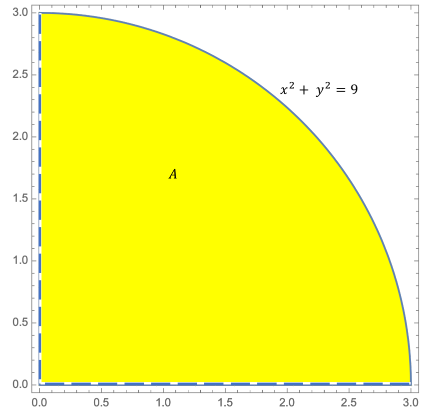
(2) Considere el conjunto

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9, x > 0, y > 0\}$$

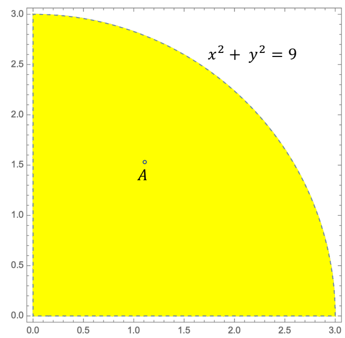
y la función

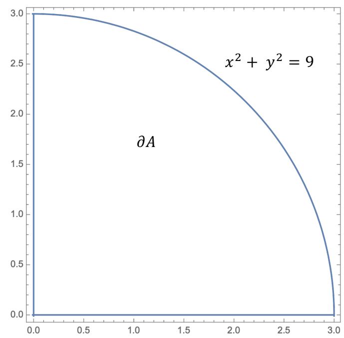
$$f(x,y) = 3x + 4y$$

(a) **(20 puntos)** Dibuje el conjunto $A$, su frontera y su interior. Justifique si el conjunto $A$ es abierto, cerrado, acotado, compacto o convexo.
**Solución:** *El conjunto $A$ es aproximadamente como en el siguiente gráfico.*




*El interior y la frontera del conjunto son*



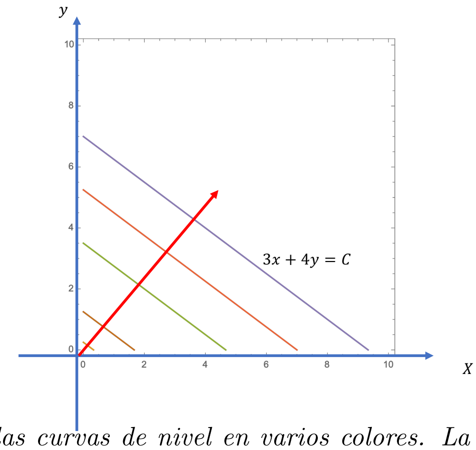

*El conjunto no es $A$ cerrado porque $\partial A$ no es un subconjunto de $A$. No es abierto porque $A \cap \partial A \neq \emptyset$. Es acotado. Por lo tanto, el conjunto $A$ no es compacto. Es convexo porque el conjunto $A$ es la intersección de tres conjuntos convexos $A = B \cap C \cap D$ con $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 \leq 9\}$, $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$. Los conjuntos $C$ y $D$ son convexos porque son unos semiplanos. El conjunto $C$ es convexo porque la función $g(x) = 9 - x^2 - y^2$ es cóncava. Puesto que $A$ es la intersección de conjuntos convexos, es también un conjunto convexo.*

(b) **(10 puntos)** Enuncie el teorema de Weierstrass. Determine si es posible aplicar el teorema de Weierstrass a la función $f$ definida en el conjunto $A$.
**Solución:** *La función $f(x,y) = 3x + 4y$ es continua en $\mathbb{R}^2$, pero el conjunto $A$ no es compacto. Por lo tanto, no es posible aplicar el teorema de Weierstrass.*

(c) **(10 puntos)** Dibuje las curvas de nivel de la función $f$, indicando la dirección de crecimiento de la función.
**Solución:** *Para $C \in \mathbb{R}$, las curvas de nivel $f$ son lineas rectas*

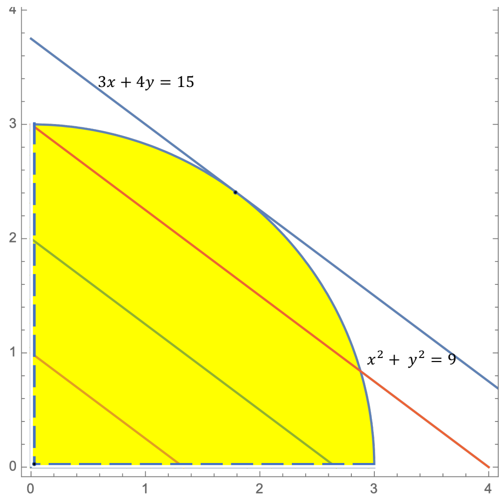
$$3x + 4y = C$$

*con pendiente* $-\frac{3}{4}$ *Gráficamente,*




*En la figura se representan las curvas de nivel en varios colores. La flecha roja representa la dirección de crecimiento de la función* $f$.

(d) **(20 puntos)** Utilizando las curvas de nivel de la función $f$, determine (en caso de que existan) los puntos extremos globales de la función $f$ en el conjunto $A$.
**Solución:** *Gráficamente,*




*Vemos que* $f(x,y) = 3x + 4y > 0$ *para todo* $(x,y) \in A$. *Por otra parte,*

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x,y>0}} f(x,y) = 0$$

*Por lo tanto, función* $f$ *no alcanza un mínimo global en* $A$. *El máximo global se alcanza en el punto* $P = (a,b)$ *donde la recta* $3x + 4y = C$ *es tangente a la gráfica de la función* $y(x)$ *definida implíciticamente por* $x^2+y^2 = 9$. *En dicho punto tenemos que* $2x+2yy' = 0$. *Es decir,* $a+by'(a) = 0$ *Por otro lado, la pendiente de la recta* $3x + 4y = C$ *es* $m = -3/4$. *Por lo tanto,* $y'(a) = -3/4$ *y tenemos que* $a - 3b/4 = 0$, $b = \frac{4a}{3}$. *Por otra parte,* $9 = a^2 + b^2 = a^2 + \frac{16a^2}{9} = \frac{25a^2}{9}$. *Como* $a > 0$, *obtenemos* $a = \frac{9}{5}$, $b = \frac{12}{5}$. *El valor mínimo de* $f$ *se alcanza en el punto* $P = \left(\frac{9}{5}, \frac{12}{5}\right)$ *y* $f\left(\frac{9}{5}, \frac{12}{5}\right) = 15$.

(3) Considere el conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned} x^2 + 2xy + z^2 + 3 &= 0 \\ y^2 + xz &= 4 \end{aligned}$$

(a) **(10 puntos)** Demuestre que el anterior sistema de ecuaciones determina implícitamente dos funciones diferenciables $y(x)$ y $z(x)$ en un entorno del punto $(x_0, y_0, z_0) = (-1, 2, 0)$.
**Solución:** *Observamos que* $(x_0, y_0, z_0) = (-1, 2, 0)$ *es una solución del sistema de ecuaciónes. Las funciones* $f_1(x, y, z) = x^2 + 2xy + z^2 + 3$ *and* $f_2(x, y, z) = y^2 + xz - 4$ *son de clase* $C^\infty$. *Calculamos*

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{array} \right|_{(x,y,z)=(-1,2,0)} = \left| \begin{array}{cc} 2x & 2z \\ 2y & x \end{array} \right|_{(x,y,z)=(-1,2,0)} = \left| \begin{array}{cc} -2 & 0 \\ 4 & -1 \end{array} \right| = 2 \neq 0.$$

*Por el teorema de la función implícita, el anterior sistema de ecuaciones determina implícitamente dos funciones diferenciables* $y(x)$ *y* $z(x)$ *en un entornno del punto* $(x_0, y_0, z_0) = (-1, 2, 0)$.

(b) **(20 puntos)** Calcule

$$y'(x), \quad z'(x)$$

en el punto $x_0 = -1$.
**Solución:** *Derivando implícitamente con respecto de* $x$,

$$\begin{aligned} 2x + 2y(x) + 2xy'(x) + 2z(x)z'(x) &= 0 \\ z(x) + 2y(x)y'(x) + xz'(x) &= 0 \end{aligned}$$

*Introducimos los valores* $x = -1$, $y(-1) = 2$, $z(1) = 0$ *para obtener el siguiente sistema*

$$\begin{aligned} 2 - 2y'(-1) &= 0 \\ 4y'(-1) - z'(-1) &= 0 \end{aligned}$$

*por lo tanto,*

$$y'(-1) = 1, \quad z'(-1) = 4$$

(c) **(10 puntos)** Calcule el polinomio de Taylor de orden 1 de las funciones $y(x)$ y $z(x)$ en el punto $x_0 = -1$.
**Solución:** *El polinomio de Taylor de orden 1 de la función* $z(x)$ *en el punto* $x_0$ *es*

$$P_1(x) = z(-1) + +z'(-1)(x - x_0)$$

*Esto es,*

$$P_1(x) = 0 + 4(x + 1) = 4x + 4$$

*El polinomio de Taylor de orden 1 de la función* $y(x)$ *en el punto* $x_0$ *es*

$$Q_1(x) = y(-1) + +y'(-1)(x - x_0)$$

*Esto es,*

$$Q_1(x) = 2 + (x + 1) = x + 3$$

(4) Clasifique la forma cuadrática $Q(x,y,z) = axz + x^2 + 4xy + 5y^2 + 6yz + 2z^2$ en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$. **(20 puntos)**

**Solución:** *La matriz asociada es*

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 4 & a \\ 4 & 10 & 6 \\ a & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

*Consideramos* $2A$. *Tenemos* $D_1 = 2 > 0$ *por lo que sólo puede ser definida positiva o semidefinida positiva.* $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = 4 > 0$ *y* $D_3 = |A| = -10a^2 + 48a - 56$. *Como las raíces de* $-10a^2 + 48a - 56$ *son* $2$ *y* $\frac{14}{5}$, *la forma cuadrática es definida positiva para* $2 < a < \frac{14}{5}$ *y semidefinida positiva para* $a = 2$ *y* $a = \frac{14}{5}$.

(5) Considere los puntos extremos de la función

$$f(x, y, z) = x^3 + y + z^2$$

en el conjunto

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 2z^2 = 4, \quad x + y = 2\}$$

(a) **(10 puntos)** Escriba la función Lagrangiana y las ecuaciones de Lagrange.
**Solución:** *El Lagrangiano es*

$$L(x, y) = x^3 - \lambda\left(4 - x^2 - y^2 - 2z^2\right) - \mu(2 - x - y) + y + z^2$$

*Las ecuaciones de Lagrange son*

$$\begin{aligned} \mu + 3x^2 + 2\lambda x &= 0 \\ \mu + 2\lambda y + 1 &= 0 \\ 4\lambda z + 2z &= 0 \\ x^2 + y^2 + 2z^2 &= 4 \\ x + y &= 2 \end{aligned}$$

(b) **(20 puntos)** Encuentre las soluciones de las ecuaciones de Lagrange.
**Solución:** *De la última ecuación obtenemos* $y = 2 - x$. *La tercera ecuación puede reescribirse como* $2z(1 + 2\lambda) = 0$. *Obtenemos que o bien* $z = 0$ *o bien* $\lambda = \frac{1}{2}$.
*Sustituyendo* $z = 0$, $y = 2 - x$ *en la cuarta ecuación obtenemos* $x^2 - 2x = 0$. *Por lo tanto,* $x = 0$ *o* $x = 2$. *Tenemos las soluciones*

$$x = 0, y = 2, z = 0, \lambda = \frac{1}{4}, \mu = 0$$

*y*

$$x = 2, y = 0, z = 0, \lambda = -\frac{11}{4}, \mu = -1$$

*Sustituyendo* $y = 2 - x$, $\lambda = \frac{1}{2}$ *en las dos primeras ecuaciones obtenemos*

$$\mu + 3x^2 - x = 0, \quad \mu + x - 1 = 0$$

*Por lo tanto,* $3x^2 - x = x - 1$. *Es decir,* $3x^2 - 2x + 1 = 0$. *Pero esta ecuación no tiene soluciones reales.*

(c) **(20 puntos)** Utilice las condiciones de segundo orden para determinar si las soluciones de las ecuaciones de Lagrange corresponden a un valor máximo o mínimo local de la función $f$ en el conjunto $S$.
**Solución:** *La matriz hessiana asociada a la función lagrangiana es*

$$HL(x, y, z; \lambda, \mu) = \begin{pmatrix} 2\lambda + 6x & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4\lambda + 2 \end{pmatrix}$$

*Por lo tanto,*

$$HL\left(0, 2, 0; -\frac{1}{4}, 0\right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*que es indefinida. La forma cuadrática asociada es*

$$Q(x, y, z) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + z^2$$

*Calculamos el espacio tangente* $T_{(0,2,0)}S$. *Sea* $g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 4$, $g_2(x, y, z) = x + y - 2$. *Tenemos,* $\nabla g_1(x, y, z) = (2x, 2y, 4z)$, $\nabla g_1(0, 2, 0) = (0, 4, 0)$, $\nabla g_2(x, y, z) = \nabla g_1(0, 2, 0) = (1, 1, 0)$. *Por lo tanto,*

$$\begin{aligned} T_{(0,2,0)}S &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (0, 4, 0) \cdot (x, y, z) = 0, (1, 1, 0) \cdot (x, y, z) = 0 \quad \} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y = 0\} = \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

*Substituyendo* $x = 0$, $y = 0$ *en* $Q(x, y, z)$, *obtenemos* $\bar{Q}(y) = Q(0, 0, z) = 2z^2 > 0$ *si* $z \neq 0$. *Por lo tanto,* $\bar{Q}(z)$ *es definida positiva y el punto crítico condicionado* $(0, 2, 0)$ *corresponde a un mínimo local de* $f$ *en* $S$. *Por otra parte,*

$$HL\left(2, 0, 0; -\frac{11}{4}, -1\right) = \begin{pmatrix} \frac{13}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{11}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

*que es indefinida. La forma cuadrática asociada es*

$$Q(x, y, z) = \frac{13}{2}x^2 - \frac{11}{2}y^2 - 9z^2$$

*Además,* $\nabla g_1(2, 0, 0) = (4, 0, 0)$, $\nabla g_1(0, 2, 0) = (1, 1, 0)$. *Por lo tanto,*

$$\begin{aligned} T_{(2,0,0)}S &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (4, 0, 0) \cdot (x, y, z) = 0, (1, 1, 0) \cdot (x, y, z) = 0 \quad \} \\ &= \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

*Substituyendo* $x = 0$, $y = 0$ *en* $Q(x, y, z)$, *obtenemos* $\bar{Q}(y) = Q(0, 0, z) = -9z^2 > 0$ *si* $z \neq 0$. *Por lo tanto,* $\bar{Q}(z)$ *es definida negativa y el punto crítico condicionado* $(2, 0, 0)$ *corresponde a un máximo local de* $f$ *en* $S$.

(d) **(10 puntos)** ¿Alguna de las soluciones de las ecuaciones de Lagrange corresponde a un valor máximo o mínimo global de $f$ en el conjunto $S$?

**Solución:** *El conjunto* $S$ *es compacto porque* $x^2 \leq 4$, $y^2 \leq 4$, $z^2 \leq 2$ *en* $S$. *Se puede aplicar el teorema de Weierstrass y la función* $f$ *alcanza un máximo global en* $(2, 0, 0)$ *y un mínimo global en* $(0, 2, 0)$ *en* $S$. *Los valores son* $f(2, 0, 0) = 8$ *y* $f(0, 2, 0) = 2$.