Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía

Examen final de Matemáticas II. 20 de mayo de 2022.

(1) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y+az &=& 2a-1 \\ x+2y+z &=& 1 \\ 5x+6y+(4a-3)z &=& b \end{array}\right.$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) **(10 puntos)** Clasifique el sistema según los valores de a y b.

(b) **(10 puntos)** Resuelva el sistema de ecuaciones para los valores de a y b para los que el sistema sea compatible.

(2) Considere el conjunto

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 \leq 9, \;\; y \geq 0\}$$

y la función

$$f(x,y) = \frac{1}{5-x+y}$$

(a) **(10 puntos)** Dibuje el conjunto A, su frontera y su interior. Justifique si el conjunto A es abierto, cerrado, acotado, compacto o convexo.

(b) **(10 puntos)** Determine si es posible aplicar el teorema de Weierstrass a la función f definida en el conjunto A.

(c) **(5 puntos)** Dibuje las curvas de nivel de la función f, indicando la dirección de crecimiento de la función.

(d) **(5 puntos)** Utilizando las curvas de nivel de la función f, determine (en caso de que existan) los puntos extremos globales de la función f en el conjunto A.

(3) Considere la función $f(x,y) = 2x^3 - 6a^2x + 3y^2 - 2y^3 - 1$, con $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

(a) **(10 puntos)** Determine los puntos críticos de la función f en el conjunto $\mathbb{R}^2$.

(b) **(10 puntos)** Clasifíque los puntos críticos calculados en el apartado anterior en máximos/mínimos (locales o globales) y puntos de silla.

(c) **(5 puntos)** Determine el mayor subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ donde la función f es convexa.

(d) **(5 puntos)** Determine todas las soluciones locales y globales del problema siguiente

$$\begin{array}{rc} \max / \min & g(x,y) = 2x^3 - 24x + 3y^2 - 2y^3 - 1 \\ \text{en el conjunto} & A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1, y < \frac{1}{4}\} \end{array}$$

(4) Considere el conjunto de ecuaciones

$$\begin{array}{rcl} t + xz^2 - 2y &=& -5 \\ t^3 + x + y^2 - z &=& 4 \end{array}$$

(a) **(5 puntos)** Demuestre que el anterior sistema de ecuaciones determina implícitamente dos funciones diferenciables $y(t,x)$ y $z(t,x)$ en un entorno del punto $(t_0, x_0, y_0, z_0) = (-1, 1, 2, 0)$.

(b) **(10 puntos)** Calcule

$$\frac{\partial y}{\partial t}, \quad \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial t}, \quad \frac{\partial z}{\partial x},$$

en el punto $(-1, 1)$.

(c) **(5 puntos)** Calcule el polinomio de Taylor de orden 1 de la función $z(t,x)$ en el punto $(t_0, x_0) = (-1, 1)$.

(d) **(5 puntos)** Utilice el polinomio de Taylor de orden 1 de la función $z(t,x)$ en el punto $(t_0, x_0) = (-1, 1)$ para encontrar una aproximación del valor de $z(-0.9, 1.1)$.

(5) Considere los puntos extremos de la función

$$f(x, y) = xy - 3x - 6y$$

en el conjunto

$$S = \{(x, y) : x + 2y = 20\}$$

(a) **(10 puntos)** Escriba la función Lagrangiana y las ecuaciones de Lagrange.

(b) **(5 puntos)** Encuentre las soluciones de las ecuaciones de Lagrange.

(c) **(10 puntos)** Utilice las condiciones de segundo orden para determinar si las soluciones de las ecuaciones de Lagrange corresponden a un valor máximo o mínimo local de la función f en el conjunto S.

(d) **(5 puntos)** ¿Alguna de las soluciones de las ecuaciones de Lagrange corresponde a un valor máximo o mínimo global de f en el conjunto S?