Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía

Examen final de Matemáticas II. 31 de mayo de 2021.

(1) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax+y+z & = & b \\ ax+y+az & = & a \\ x+ay+z & = & 1 \end{array}\right.$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ son parámetros.

(a) Clasifique el sistema según los valores de a y b. $\boxed{\textbf{10 puntos}}$

Solution: *La matriz ampliada asociada al sistema es*

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & b \\ a & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hacemos las operaciones siguientes

$$\textit{fila 2} \mapsto \textit{fila 2} - a \times \textit{fila 1}$$

$$\textit{fila 3} \mapsto \textit{fila 3} - a \times \textit{fila 1}$$

Y obtenemos que el sistema original es equivalente a otro cuya matriz aumenta es

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1-a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & b-a \end{pmatrix}$$

Ahora hacemos fila 3 $\mapsto$ *fila 3* $-$ *fila 2 y obtenemos*

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1-a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & b-a \end{pmatrix}$$

Vemos que

(i) *si* $a \neq 1$, *entonces* $\text{rango}\, A = \text{rango}(A|b) = 3$. *El sistema es compatible con solución única.*

(ii) *si* $a = 1$, *el sistema es compatible si y sólo si* $b = 1$. *En este caso,* $\text{rango}\, A = \text{rango}(A|b) = 1$. *El sistema es compatible indeterminado con* 2 *parámetros.*

(iii) *si* $a = -1$, *entonces* $\text{rango}\, A = \text{rango}(A|b) = 2$. *El sistema es compatible indeterminado con* 1 *parámetro.*

(b) Resuelva el sistema de ecuaciones para el valor $a = -1$ $\boxed{\textbf{10 puntos}}$

Solution: *El sistema de ecuaciones propuesto es equivalente al siguiente sistema*

$$\left\{\begin{array}{lcr} x-y+z & = & 1 \\ 2z & = & b+1 \end{array}\right.$$

La solución es

$$x \in \mathbb{R}, \quad y = x + \frac{b-1}{2}, \quad z = \frac{b+1}{2}$$

(2) Considere el conjunto

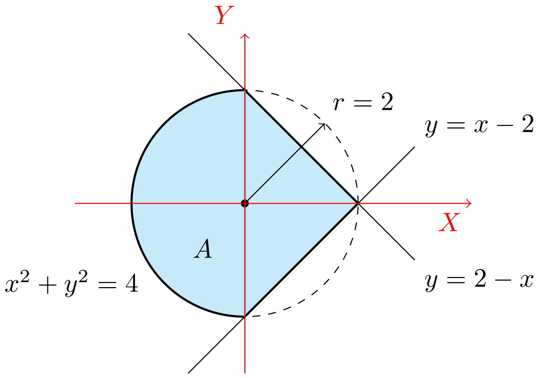
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, \ \ y \leq 2 - x, \ \ y \geq x - 2\}$$

y la función

$$f(x,y) = -\ln\left((x+1)^2 + y^2\right)$$

(a) Dibuje el conjunto A y justifique si es abierto, cerrado, acotado, compactoo o convexo. $\boxed{\textbf{10 puntos}}$

Solution: *El conjunto A es el siguiente (en azul).*



El interior y la frontera son

El conjunto A cerrado porque $\partial A \subset A$. No es abierto porque $A \cap \partial A \neq \emptyset$. Es acotado. Por lo tanto, el conjunto A es compacto. Es convexo porque el conjunto A es la intersección de tres conjuntos convexos $A = B \cap C \cap D$ con

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x - 2\}$$

y

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 2 - x\}$$

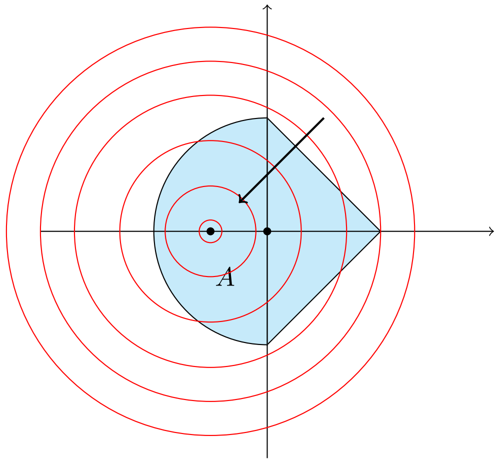
La función $g(x) = x^2 + y^2$ es convexa. Por lo tanto B es convexo. Los conjuntos C y D son semiplanos y, por lo tanto, también convexos. Puesto que A es la intersección de tres conjuntos convexo, es también convexo.

(b) Enuncie el teorema Weierstrass. Determine si es posible aplicar este teorema a la función f definida en el conjunto A. Utilizando las curvas de nivel, determine (en caso de que existan) los puntos extremos globales de la función f en el conjunto A. $\boxed{\textbf{10 puntos}}$

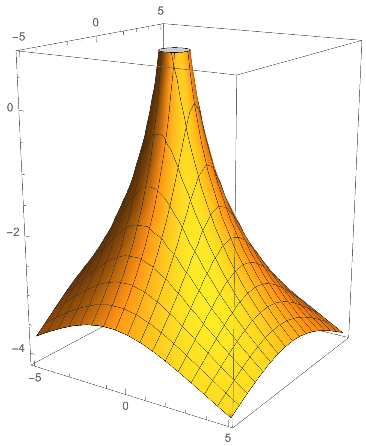
Solution: *El conjunto A es compacto. La función $f(x,y) = -\ln\left((x+1)^2 + y^2\right)$ es continua en su dominio de defínción $D(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(-1,0)\}$. Puesto que, $(-1,0) \in A$, la función f no es continua en A. El teorema de Weierstrass no puede ser aplicado. Además,*

$$\lim_{(x,y)\to(-1,0)} f(x,y) = +\infty$$

Concluimos que la función no alcanza un valor maximo en A. Las curvas de nivel están determinadas por la ecuación $(x+1)^2 + y^2 = c$, $c > 0$. Por lo tanto, las curvas de nivel de f son cículos de centro $(-1,0)$ y radio $\sqrt{c}$. En la figura aparecen representadas las curvas de nivel en rojo color. La flecha representa la dirección de crecimiento de la función f



Gráficamente, vemos que el valor mínimo se alcanza en el punto $(2,0)$. *Para ayudar a entender mejor el ejercicio, la representación gráfica de* f *es*



La asíntota vertical se da en el punto $(-1,0)$.

(3) Considere la función $f(x,y) = x^2 + 4xy - 2x + 2y^3 + 6y^2 - 20y$.

(a) Determine el mayor subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ donde la función f es estrictamente cóncava o convexa. **10 puntos**

Solution: *El gradiente de la función f es*

$$\nabla f(x,y) = \big(2x + 4y - 2, 4x + 6y^2 + 12y - 20\big)$$

Obtenemos ahora la matriz Hessiana

$$\mathrm{H}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 12y + 12 \end{pmatrix}$$

Tenemos $D_1 = 2 > 0$, $D_2 = 8 + 24y$. Por lo tanto, $D_2 > 0$ si y sólo si $y > -1/3$. Por lo tanto, la función es convexa en el conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > -1/3\}$. La función no es cóncava en ningún subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$.

(b) Encuentre los puntos críticos de f y clasifíquelos en máximos/mínimos (locales o globales) y puntos de silla. **10 puntos**

Solution: *Los puntos críticos satisfacen las ecuaciones*

$$2x + 4y - 2 = 0, \quad 4x + 6y^2 + 12y - 20 = 0$$

Las soluciones son

$$x = 5, y = -2, \quad x = -\frac{5}{3}, \quad y = \frac{4}{3}$$

La matriz Hessiana evaluada en el punto $x = 5$, $y = -2$ es

$$\mathrm{H}\, f(5,-2) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -12 \end{pmatrix}$$

Los menores principales de la matriz Hessiana son $D_1 = 2 > 0$, $D_2 = -40 < 0$. Por lo tanto, el punto $(5,-2)$ corresponde a un punto de silla. La matriz Hessiana evaluada en el punto $x = -\frac{5}{3}$, $y = \frac{4}{3}$ es

$$\mathrm{H}\, f\left(-\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 28 \end{pmatrix}$$

Los menores principale dominantes de la matriz Hessiana son $D_1 = 2 > 0$, $D_2 = 40 > 0$. Por lo tanto, el punto $\left(-\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)$ corresponde a un mínimo local. No corresponde a un mínimo global porque,

$$\lim_{y \to -\infty} f(0,y) = \lim_{y \to -\infty} \big(2y^3 + 6y^2 - 20y\big) = -\infty$$

(4) Considere el conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned} xz + yz &= -4 \\ x + y^2 - z &= -2 \end{aligned}$$

(a) Demuestre que el anterior sistema de ecuaciones determina implícitamente dos funciones diferenciables $y(x)$ y $z(x)$ en un entorno del punto $(x, y, z) = (-1, -1, 2)$. $\boxed{\textbf{10 puntos}}$

Solution: *Observamos que $(x, y, z) = (-1, -1, 2)$ es una solución del sistema de ecuaciónes. Las funciones $f_1(x, y, z) = xz + yz + a$ y $f_2(x, y, z) = x + y^2 - z + 2$ son de clase C^∞. Calculamos*

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{array} \right|_{(x,y,z)=(-1,-1,2)} = \left| \begin{array}{cc} z & x+y \\ 2y & -1 \end{array} \right|_{(x,y,z)=(-1,-1,2)} = \left| \begin{array}{cc} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{array} \right| = -6$$

Por el teorema de la función implícita, el anterior sistema de ecuaciones determina implícitamente dos funciones diferenciables $y(x)$ y $z(x)$ en un entornno del punto $(x, y, z) = (-1, -1, 2)$.

(b) Calcule

$$y'(-1), z'(-1)$$

y el polinomio de Taylor de orden uno de las funciones $y(x)$ y $z(x)$ en el punto $x_0 = -1$. $\boxed{\textbf{10 puntos}}$

Solution: *Derivando implícitamente con respecto a x,*

$$\begin{aligned} zy' + yz' + xz' + z &= 0 \\ 2yy' - z' + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Insertamos los valores $(x, y, z) = (-1, -1, 2)$ y obtenemos

$$\begin{aligned} 2y'(-1) - 2z'(-1) + 2 &= 0 \\ 1 - 2y'(-1) - z'(-1) &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$y'(-1) = 0, \quad z'(-1) = 1$$

Por lo tanto, el polinomio de Taylor de orden 1 de la función $y(x)$ en el punto $x_0 = -1$ es

$$P_1(x) = y(-1) + y'(-1)(x + 1) = -1$$

y el polinomio de Taylor de orden 1 de la función $z(x)$ en el punto $x_0 = -1$ es

$$Q_1(x) = z(-1) + z'(-1)(x + 1) = x + 3$$

(5) Considere los puntos extremos de la función

$$f(x,y) = 2x^3 - y^3$$

en el conjunto

$$S = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 5\}$$

(a) Escriba la función Lagrangiana, las ecuaciones de Lagrange y encuentra las soluciones. **10 puntos**

Solution: *El Lagrangiano es*

$$\mathcal{L}(x,y) = 2x^3 - y^3 - \lambda\left(x^2 + y^2 - 5\right)$$

Las ecuaciones de Lagrange son

$$\begin{aligned} 6x^2 - 2\lambda x &= 0 \\ -3y^2 - 2\lambda y &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 5 \end{aligned}$$

que podemos reescribir como

$$\begin{aligned} 2x(3x - \lambda) &= 0 \\ y(3y + 2\lambda) &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 5 \end{aligned}$$

Obtenemos inmediatamente las soluciones

$$\begin{aligned} x = 0, \quad y = -\sqrt{5}, \quad \lambda = \frac{3\sqrt{5}}{2} \\ x = 0, \quad y = \sqrt{5}, \quad \lambda = -\frac{3\sqrt{5}}{2} \\ x = -\sqrt{5}, \quad y = 0, \quad \lambda = -3\sqrt{5} \\ x = \sqrt{5}, \quad y = 0, \quad \lambda = 3\sqrt{5} \end{aligned}$$

En otro caso, obtenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned} 3x - \lambda &= 0 \\ 3y + 2\lambda &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 5 \end{aligned}$$

Es decir, $\lambda = 3x$ *y sustituyendo en la segunda ecuación, obtenemos* $3y + 6x = 0$. *Por lo tanto,* $y = -2x$ *y sustituyendo en la tercera ecuación obtenemos* $5x^2 = 5$. *Por lo tanto, obtenemos también las soluciones*

$$\begin{aligned} x = -1, \quad y = 2, \quad \lambda = -3 \\ x = 1, \quad y = -2, \quad \lambda = 3 \end{aligned}$$

(b) Encuentre el máximo y el mínimo global de f en el conjunto S. **10 puntos**

Solution: *El conjunto* S *es compacto y la función* f *es continua. Por lo tanto el la función* f *alcanza máximo y mínimo globales en* S, *por el teorema de Weiestrass. Notemos que*

$$\begin{aligned} f(-1,2) &= -10 \\ f\left(0,-\sqrt{5}\right) &= 5\sqrt{5} \\ f\left(0,\sqrt{5}\right) &= -5\sqrt{5} \\ f(1,-2) &= 10 \\ f\left(-\sqrt{5},0\right) &= -10\sqrt{5} \\ f\left(\sqrt{5},0\right) &= 10\sqrt{5} \end{aligned}$$

Vemos que el máximo global se alcanza en el punto $\left(\sqrt{5},0\right)$. *El valor máximo es* $f\left(\sqrt{5},0\right)=10\sqrt{5}$. *El mínimo global se alcanza en el punto* $\left(-\sqrt{5},0\right)$. *El valor mínimo es* $f\left(-\sqrt{5},0\right)=-10\sqrt{5}$. *Por supuesto, estos puntos son también extremos locales.*