Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía

Examen final de Matemáticas II. 25 de junio de 2019.

(1) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{cases} 3x - y + 2z &= 1 \\ x + 4y + z &= b \\ 2x - 5y + (a+1)z &= 0 \end{cases}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ son parámetros.

(a) Clasifique el sistema según los valores de a y b. **5 puntos**

(b) Resuelva el sistema de ecuaciones para los valores de a y b para los cuales el sistema tiene al menos una solución. **5 puntos**

(2) Considere el conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$ y la función

$$f(x,y) = x - y$$

definida en el conjunto A.

(a) Dibuje el conjunto A y justifique si es abierto, cerrado, acotado, compacto o convexo. **5 puntos**

(b) Enuncie el teorema Weierstrass. Determine si es posible aplicar este teorema a la función f definida en el conjunto A. Utilizando las curvas de nivel, determine (en caso de que existan) los puntos extremos globales de la función f en el conjunto A. **5 puntos**

(3) Considere la función $f(x,y) = ax^3 + ay^2 - 2xy$ donde $a \in \mathbb{R}$ es un parámetro y $a > 0$.

(a) Calcule el vector gradiente y la matriz Hessiana de la función f. Calcule el polinomio de Taylor de orden 2 de la función f, centrado en el punto $x = 0$, $y = 1$. Calcule los puntos críticos de f. **5 puntos**

(b) Determine, de acuerdo a los valores del parámetro a, el mayor conjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ donde la función f es cóncava o convexa. **5 puntos**

(4) Considere el conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned} xy + zy^2 &= 1 \\ x + y - z &= 0 \end{aligned}$$

(a) Demuestre que el anterior sistema de ecuaciones determina implícitamente dos funciones diferenciables $y(x)$ y $z(x)$ en un entorno del punto $(x,y,z) = (0,1,1)$. **4 puntos**

(b) Calcule

$$y'(0), z'(0)$$

y el polinomio de Taylor de orden uno de las funciones $y(x)$ y $z(x)$ en el punto $x_0 = 0$. **6 puntos**

(5) Considere la función

$$f(x,y) = xy - x^3 - y^2$$

(a) Determine los puntos críticos de f en el conjunto $\mathbb{R}^2$. **5 puntos**

(b) Clasifique los puntos críticos de f en el conjunto $\mathbb{R}^2$ y justifique si se trata de un máximo/mínimo local o global. **5 puntos**

(6) Considere la función

$$f(x, y, z) = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2$$

y el conjunto

$$S = \{(x, y, z) : x + y + z = 1\}$$

(a) Escriba la función Lagrangiana y las ecuaciones de Lagrange $\boxed{\textbf{5 puntos}}$

(b) Utilizando el método de Lagrange encuentre el mínimo global de f $f(x, y, z)$ en el conjunto S. $\boxed{\textbf{5 puntos}}$