

- (1) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{cases} x + ay = b \\ ax + z = b \\ ay + z = 2 \end{cases}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ son parámetros.

- (a) Clasifique el sistema según los valores de a y b . 1 punto

Solución: La matriz asociada al sistema es

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & b \\ a & 0 & 1 & b \\ 0 & a & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Intercambiando las filas 2 y 3 obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & b \\ 0 & a & 1 & 2 \\ a & 0 & 1 & b \end{pmatrix}$$

A continuación realizamos la operación fila 3 $\mapsto$ fila 3 $- a \times$ fila 1. Obtenemos que el sistema anterior es equivalente a otro sistema de ecuaciones lineales cuya matriz asociada es la siguiente

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & b \\ 0 & a & 1 & 2 \\ 0 & -a^2 & 1 & b - ab \end{pmatrix}$$

Ahora realizamos la operación fila 3 $\mapsto$ fila 3 $+ a \times$ fila 2 y obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & b \\ 0 & a & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 + a & b - ab + 2a \end{pmatrix}$$

Desarrollando a partir de la última fila, obtenemos que el determinante es $a(a+1)$. Por lo tanto, si $a \neq 0$ y $a \neq -1$ el sistema de ecuaciones lineales es compatible determinado. La solución es

$$z = \frac{b - ab + 2a}{1 + a}, \quad y = 2 - \frac{b - ab + 2a}{a(1 + a)}, \quad x = b - 2a + \frac{b - ab + 2a}{1 + a}$$

- (i) Supongamos que $a = 0$. El sistema de ecuaciones lineales propuesto es equivalente a otro sistema cuya matriz aumentada es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{pmatrix}$$

(A) Si $b \neq 2$ el sistema no tiene solución porque $\text{rango}(A) = 2 < \text{rango}(A|B) = 3$.

(B) Si $b = 2$ el sistema es compatible indeterminado con 1 parámetro, ya que $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|B) = 2$.

- (ii) Supongamos ahora que $a = -1$. El sistema de ecuaciones lineales propuesto es equivalente a otro sistema cuya matriz aumentada es

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & b \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2b - 2 \end{pmatrix}$$

(A) Si $b \neq 1$ el sistema no tiene solución porque $\text{rango}(A) = 2 < \text{rango}(A|B) = 3$.

(B) Si $b = 1$ el sistema es compatible indeterminado con 1 parámetro, ya que $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|B) = 2$.

- (b) Resuelva el sistema anterior de ecuaciones lineales para los valores $a = -1$, $b = 1$. **1 punto**

Solución: El sistema de ecuaciones lineales propuesto es equivalente al siguiente sistema

$$\begin{cases} x - y &= 1 \\ -y + z &= 2 \end{cases}$$

Elegimos y como el parámetro. El conjunto de soluciones es $\{(1 + y, y, y + 2) : y \in \mathbb{R}\}$.

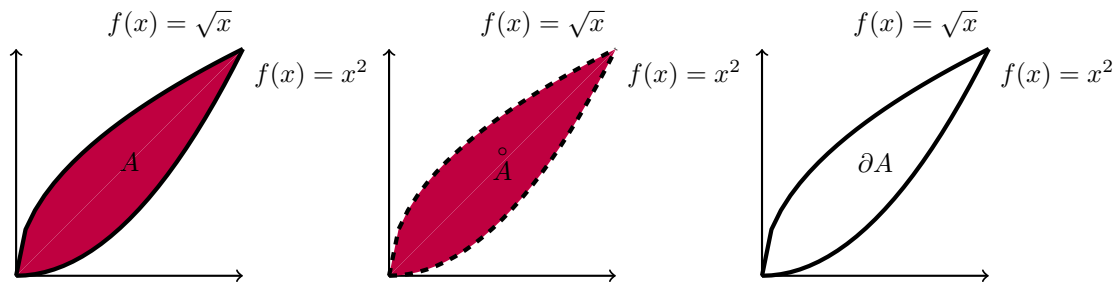
- (2) Considere el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$ y la función

$$f(x, y) = x + y$$

definida en A .

- (a) Dibuje el conjunto A y justifique si es abierto, cerrado, acotado, compacto o convexo. **1 punto**

Solución: Aproximadamente, el conjunto A está representado en la figura siguiente



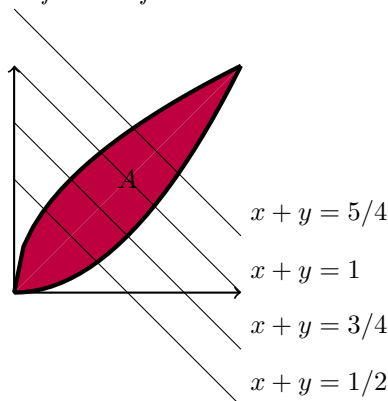
Es cerrado porque $\partial A \subset A$. No es abierto porque $A \cap \partial A \neq \emptyset$. Es acotado, porque el disco de centro el origen y radio 2 contiene al conjunto A . Por lo tanto, el conjunto A es compacto. También es convexo.

- (b) Determine si es posible aplicar el Teorema de Weierstrass a la función f definida en A . Utilizando las curvas de nivel, determine (si existen) los puntos extremos globales de f en el conjunto A .

1 punto

Solución: El Teorema de Weierstrass se puede aplicar porque, la función f es continua en todo $\mathbb{R}^2$ y el conjunto A es compacto.

En la figura se representan las curvas de nivel de f . Observamos que, siguiendo las curvas de nivel, la función f alcanza un máximo global en el punto $(1, 1)$ y un mínimo global en el punto $(0, 0)$.



- (3) Considere la función $f(x, y) = x^2 e^y$.

- (a) Escriba la ecuación del plano tangente a la gráfica de la función f en el punto $(-1, 0, 1)$. **1 punto**

Solución: El vector gradiente de f es $\nabla f(x, y) = (2xe^y, x^2 e^y)$. Calculado en el punto $(-1, 0)$ es $\nabla f(-1, 0) = (-2, 1)$. La ecuación del plano tangente es $-2(x + 1) + y - (z - 1) = 0$. Es decir,

$$z = 1 - 2(x + 1) + y$$

- (b) Calcule el polinomio de Taylor's de orden 2 de la función f en el punto $(-1, 0)$. **1 punto**

Solución: La matriz Hessiana es

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 2e^y & 2xe^y \\ 2xe^y & x^2e^y \end{pmatrix}$$

que en el punto $(-1, 0)$ es

$$Hf(-1, 0) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, el polinomio de Taylor's de orden 2 es

$$P_2(x, y) = 1 - 2(x + 1) + y + (x + 1)^2 - 2(x + 1)y + \frac{y^2}{2}$$

(4) Considere la función:

$$f(x, y, z) = ax^2 + c^2z^2 + \sqrt{2}abxy + ay^2$$

- (a) Encuentre los valores de los parámetros a , b y c tales que la función $f(x, y, z)$ es convexa. Encuentre los valores de los parámetros a , b y c tales que la función $f(x, y, z)$ es cóncava. **1,5 puntos**

Solución: El gradiente de la función $f(x, y, z)$ es

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2ax + \sqrt{2}aby \\ 2ay + \sqrt{2}abx \\ 2c^2z \end{pmatrix}.$$

De (4a) obtenemos la matriz Hessiana de $f(x, y, z)$:

$$Hf(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2a & \sqrt{2}ab & 0 \\ \sqrt{2}ab & 2a & 0 \\ 0 & 0 & 2c^2 \end{pmatrix},$$

cuyos menores principales son

$$\begin{aligned} D_1 &= 2a, \\ D_2 &= 4a^2 - 2a^2b^2 = 2a^2(2 - b^2), \\ D_3 &= 4a^2(2 - b^2)c^2. \end{aligned}$$

Observamos que si $b^2 > 2$ entonces $D_2 < 0$ y la función no puede ser cóncava ni convexa.

(i) Supongamos que $c \neq 0$.

- (A) Si $a > 0$, $b^2 < 2$ entonces $D_1 > 0$, $D_2 > 0$ y $D_3 > 0$. La matriz Hessiana es definida positiva y la función es estrictamente convexa.
(B) Supongamos que $a > 0$, $b^2 = 2$. Intercambiando las variables x y z , obtenemos la función $f(z, y, x) = az^2 + c^2x^2 + \sqrt{2}abzy + ay^2$. La nueva matriz Hessiana es

$$Hf(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2c^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2a & \sqrt{2}ab \\ 0 & \sqrt{2}ab & 2a \end{pmatrix},$$

cuyos menores principales son $D_1 = 2c^2 > 0$, $D_2 = 4ac^2 > 0$, $D_3 = 4a^2(2 - b^2)c^2 = 0$. Vemos que la matriz Hessiana es positiva semi-definida, por lo que la función es convexa.

- (C) Si $a = 0$, la función es $f(x, y, z) = cz^2$ y, por tanto, es convexa.
(D) Si $a \neq 0$, $b^2 \neq 2$, entonces el signo de D_2 y D_3 es el mismo. La función no puede ser cóncava.

(ii) Supongamos ahora que $c = 0$. En ese caso, la función es $f(x, y, z) = ax^2 + \sqrt{2}abxy + ay^2$ que, considerada como una función de tres variables no puede ser estrictamente cóncava o convexa, porque $f(0, 0, z) = 0$.

- (A) Si $a > 0$ y $b^2 < 2$, entonces $D_1 > 0$, $D_2 > 0$ y $D_3 = 0$. La matriz Hessiana es positiva semi-definida y la función es convexa.
(B) Si $a < 0$ y $b^2 < 2$, entonces $D_1 < 0$, $D_2 > 0$ y $D_3 = 0$. La matriz Hessiana es semidefinida negativa y la función es cóncava,
(C) Si $b^2 = 2$, entonces la función es $f(x, y, z) = a(x^2 + y^2 \pm 2xy) = a(x \pm y)^2$ que es cóncava si $a < 0$ y convexa si $a > 0$.

- (b) Considere el caso $a = 1$, $b = 3$. ¿La función $f(x, y, z)$ tiene máximos y/o mínimos locales?

0,5 puntos

Solución: Si $a = 1$ y $b = 3$, la matriz Hessiana es indefinida para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, porque $D_1 > 0$, $D_2 < 0$. Esto implica que el único punto crítico obtenido de (4a), $x = y = z = 0$, es un punto de silla. La función $f(x, y, z)$ no tiene máximos ni mínimos locales.

- (5) Considere la función $f(x, y, z) = x + y + z$ definida en el conjunto

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 2z^2 = 4, x + y = 2\}$$

- (a) Escriba las ecuaciones de Lagrange para f en el conjunto A . Calcule los puntos que satisfacen esas ecuaciones y los valores de los multiplicadores de Lagrange asociados. **1 punto**
- (b) Utilizando las condiciones de segundo orden, clasifique los puntos críticos calculados en el apartado anterior. Determine los puntos donde la función f alcanza un máximo y/o un mínimo globales en el conjunto A . **1 punto**

Solución:

- (a) La función objetivo f y las restricciones $g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 4$ y $g_2(x, y, z) = x + y - 2$ son de clase C^1 (de hecho son de clase C^n para todo n). Ahora comprobamos la condición de regularidad. Tenemos que $\nabla g_1(x, y, z) = (2x, 2y, 4z)$, $\nabla g_2(x, y, z) = (1, 1, 0)$. Y calculamos el rango de la matriz

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 2x & 2y & 4z \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2x & 2y & 4z \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2y - 2x & 4z \end{pmatrix}$$

Este rango 2 excepto cuando $y = x$ y $z = 0$. Pero ningún punto de la forma $(x, x, 0)$ satisface las restricciones $x^2 + y^2 + 2z^2 = 4$, $x + y = 2$. Concluimos que se satisfacen las hipótesis del teorema de Lagrange Theorem. Los puntos extremos de f en el conjunto A son los puntos críticos del Lagrangiano

$$L(z, y, z, \lambda) = x + y + z + \lambda(x^2 + y^2 + 2z^2 - 4) + \mu(x + y - 2).$$

Las ecuaciones de Lagrange son:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}(x, y, z) = 1 + 2\lambda x + \mu = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x, y, z) = 1 + 2\lambda y + \mu = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z}(x, y, z) = 1 + 4\lambda z = 0 \\ 4 = x^2 + y^2 + 2z^2 \\ 2 = x + y \end{cases}$$

De la tercera ecuación vemos que $\lambda \neq 0$. Utilizando ahora las dos ecuaciones primeras vemos que $x = y$. Sustituyendo $x = y$ en la última ecuación obtenemos $x = y = 1$. Y de la cuarta ecuación obtenemos $z = \pm 1$. Es decir, Tenemos las soluciones

$$\begin{aligned} x = y = z = 1, \quad \lambda = -\frac{1}{4}, \quad \mu = -\frac{1}{2} \\ x = y = 1, z = -1, \quad \lambda = \frac{1}{4}, \quad \mu = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

- (b) Utilizamos las condiciones de segundo orden para clasificar los puntos críticos. La matriz Hessiana del Lagrangiano con respecto a (x, y, z) es

$$\mathcal{H}L_{x,y,z}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4\lambda \end{pmatrix}.$$

En el punto $(1, 1, 1)$, la matriz Hessiana es definida negativa. Por lo tanto, $(1, 1, 1)$ es un máximo local de f en el conjunto A . En el punto $(1, 1, -1)$, la matriz Hessiana es definida positiva, Por lo tanto, $(1, 1, -1)$ es un mínimo local de f en el conjunto A .

Se puede aplicar el Teorema de Weierstrass porque el conjunto A es un conjunto compacto y la función objetivo es continua. Concluimos que f tiene un máximo global y un mínimo global en el conjunto A . Como estos puntos satisfacen las ecuaciones de Lagrange, vemos que $(1, 1, 1)$ corresponde a un máximo global y $(1, 1, -1)$ corresponde a un mínimo global de f en el conjunto A .

