Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía

Examen final de Matemáticas II. Junio de 2017.

(1) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función de dos parámetros $a, b \in \mathbb{R}$

$$\left\{\begin{array}{lcr} x+y+2z & = & 1 \\ 2ax+(3a-1)y+(5a-2)z & = & 2+2a \\ 2ax+(3a-1)y+(5a-2+b^2)z & = & 2a-b+2 \end{array}\right.$$

se pide:

(a) Enuncie el Teorema de Rouchée–Frobenius. **0.5 puntos**

(b) Clasifique el sistema según los valores de a y b. **1 punto**

(c) Resuelva el sistema anterior para el valor de $a=1$, $b=1/2$. **0.5 puntos**

(2) Considere la función

$$f(x,y)=\left\{\begin{array}{rl} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{array}\right.$$

(a) Calcule las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

y el gradiente de la función f en el punto $(0,0)$. **1 punto**

(b) Calcule la derivada direccional de la función f según el vector $v=(1,1)$ en el punto $p=(0,0)$. Determine si la función f es diferenciable en el punto $(0,0)$. **1 punto**

(3) Considere la función $f(x,y)=y^3-x^3+3x^2+3y^2$.

(a) Calcule y clasifique los puntos críticos (si existen) de la función f en el conjunto $\mathbb{R}^2$. **1 punto**

(b) Halle el subconjunto abierto $S\subset\mathbb{R}^2$ más grande donde la función f sea convexa. Calcule y clasifique los puntos críticos (si existen) de la función f en el conjunto S. **1 punto**

(4) Se considera la función $f(x,y)=x^2\ln y$.

(a) Calcule el plano tangente a la gráfica de la función f en el punto $p=(1,1,0)$. **1 punto**

(b) Calcule el polinomio de Taylor de orden 2 de la función f del apartado anterior en el punto $p=(1,1)$. **1 punto**

(5) Sea $f(x,y,z)=x+z$ y considérese la esfera de ecuación $x^2+y^2+z^2=1$.

(a) Verifique que se cumplen las condiciones del teorema de Lagrange, escriba las ecuaciones de Lagrange y obtenga las soluciones de dichas ecuaciones. **1 punto**

(b) Determine los extremos relativos de f en la esfera. Determine si estos puntos son extremos locales o globales. Justifique la respuesta. **1 punto**