Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía

Examen final de Matemáticas II. Junio de 2017.

(1) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función de dos parámetros $a, b \in \mathbb{R}$

$$\left\{ \begin{array}{lcr} x + y + 2z & = & 1 \\ 2ax + (3a-1)y + (5a-2)z & = & 2+2a \\ 2ax + (3a-1)y + (5a-2+b^2)z & = & 2a-b+2 \end{array} \right.$$

se pide:

(a) Enuncie el Teorema de Rouchée–Frobenius. $\boxed{\textbf{0.5 puntos}}$

(b) Clasifique el sistema según los valores de a y b. $\boxed{\textbf{1 punto}}$

Solución: *La matriz ampliada del sistema es*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2a & 3a-1 & 5a-2 & 2a+2 \\ 2a & 3a-1 & b^2+5a-2 & 2a-b+2 \end{pmatrix}$$

Tras las siguientes operaciones elementales con filas

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2a & 3a-1 & 5a-2 & 2a+2 \\ 2a & 3a-1 & b^2+5a-2 & 2a-b+2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & a-2 & 2 \\ 0 & a-1 & b^2+a-2 & 2-b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & a-2 & 2 \\ 0 & 0 & b^2 & -b \end{pmatrix}$$

se obtiene que el sistema propuesto es equivalente al sistema de ecuaciones lineales cuya matriz ampliada es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & a-2 & 2 \\ 0 & 0 & b^2 & -b \end{pmatrix}$$

Desarrollando por la última fila, obtenemos que el determinante de la matriz A es $b^2(a-1)$. Deducimos que si $a \neq 1$ y $b \neq 0$ el sistema es compatible determinado.
Supongamos primero que $b = 0$. El sistema propuesto es equivalente al sistema de ecuaciones

lineales cuya matriz ampliada es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & a-2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Y vemos que cuando $b = 0$ $\operatorname{rango}(A) = \operatorname{rango}(A|b) = 2$ y el sistema es compatible indeterminado con $3 - 2 = 1$ parámetro, para cualquier valor del parámetro a. Supongamos ahora que $a = 1$. El sistema propuesto es equivalente al sistema de ecuaciones lineales cuya matriz ampliada es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & b^2 & -b \end{pmatrix}$$

Y vemos que $\operatorname{rango}(A) = 2$. Sumando a la tercera fila la segunda fila multiplicada por b^2 obtenemos la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & b(2b-1) \end{pmatrix}$$

Concluimos que si $a = 1$ y $b \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1/2\}$ el sistema es incompatible. Mientras que si $a = 1$ y $b = 0$ ó $b = 1/2$, el sistema es compatible indeterminado con $3 - 2 = 1$ parámetros.

(c) Resuelva el sistema anterior para el valor de $a = 1$, $b = 1/2$. $\boxed{\textbf{0.5 puntos}}$

Solución: *El sistema propuesto es equivalente al siguiente sistema de ecuaciones lineales*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x + y + 2z & = & 1 \\ -z & = & 2 \end{array} \right.$$

Eligiendo y como parámetro, el conjunto de soluciones es $\{(5-y, y, -2) : y \in \mathbb{R}\}$.

(2) Considere la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Calcule las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

y el gradiente de la función f en el punto $(0,0)$. $\boxed{\textbf{1 punto}}$

Solución: *Como para* $x, y \neq 0$, $f(x,0) = f(0,y) = f(0,0) = 0$ *tenemos que*

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0$$

y concluimos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

y que $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

(b) Calcule la derivada direccional de la función f según el vector $v = (1,1)$ en el punto $p = (0,0)$. Determine si la función f es diferenciable en el punto $(0,0)$. $\boxed{\textbf{1 punto}}$

Solución: *Para* $t \neq 0$ *tenemos que*

$$f(p+tv) = f((0,0) + t(1,1)) = f(t,t) = \frac{t^3}{2t^2} = \frac{t}{2}$$

Por lo tanto

$$D_v(p) = \lim_{t\to 0} \frac{f(p+tv) - f(p)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Como

$$D_v(p) \neq \nabla f(0,0) \cdot v$$

la función f *no es diferenciable en el punto* $(0,0)$.

(3) Considere la función $f(x,y) = y^3 - x^3 + 3x^2 + 3y^2$.

(a) Calcule y clasifique los puntos críticos (si existen) de la función f en el conjunto $\mathbb{R}^2$. $\boxed{\textbf{1 punto}}$

Solución: *El gradiente de f es*

$$\left(6x - 3x^2, 3y^2 + 6y\right)$$

las ecuaciones que definen los puntos críticos son

$$\begin{aligned} 0 &= 6x - 3x^2 \\ 0 &= 3y^2 + 6y \end{aligned}$$

Las soluciones son $(0,0)$, $(0,-2)$, $(2,-2)$ y $(2,0)$. La matriz Hessiana de la función f es

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6-6x & 0 \\ 0 & 6y+6 \end{pmatrix}$$

Vemos que

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad H(0,-2) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}, \quad H(2,-2) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}, \quad H(2,0) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Utilizando las condiciones de segundo orden, deducimos que en $(0,0)$ se alcanza un mínimo local, en $(0,-2)$ y en $(2,0)$ hay un punto de silla y en $(2,-2)$ se alcanza un máximo local. Finalmente, $f(0,y) = y^3 + 3y^2$ y vemos que $\lim_{y\to\infty} f(0,y) = +\infty$, $\lim_{y\to-\infty} f(0,y) = -\infty$ por lo que no hay máximo global ni mínimo global en el conjunto $\mathbb{R}^2$.

(b) Halle el subconjunto abierto $S \subset \mathbb{R}^2$ más grande donde la función f sea convexa. Calcule y clasifique los puntos críticos (si existen) de la función f en el conjunto S. $\boxed{\textbf{1 punto}}$

Solución: *La matriz Hessiana de la función f es*

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 6-6x & 0 \\ 0 & 6y+6 \end{pmatrix}$$

Vemos que

$$D_1 = 6(1-x), \quad D_2 = 36(1-x)(1+y)$$

Para que $D_1 > 0$ es necesario y suficiente que $x < 1$. Suponiendo que $x < 1$, vemos que $D_2 > 0$ si y sólo si $y > -1$. Por lo tanto,

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 1, y > -1\}$$

De todos los puntos críticos calculados en el apartado anterior vemos que sólo $(0,0) \in S$. Y por el Teorema local-global $(0,0)$ corresponde a un mínimo global de f en S.

(4) Se considera la función $f(x,y) = x^2 \ln y$.

(a) Calcule el plano tangente a la gráfica de la función f en el punto $p = (1,1,0)$. $\boxed{\textbf{1 punto}}$

Solución: *Como* $f(1,1) = 0$, *el punto* p *están en la gráfica de la función* f. *Por otra parte* $\nabla f(1,1) = (0,1)$. *La ecuación del plano tangente es* $z = f(1,1) + \nabla f(1,1) \cdot (x-1, y-1) = 0 + (0,1) \cdot (x-1, y-1)$, *es decir,*

$$z = y - 1$$

(b) Calcule el polinomio de Taylor de orden 2 de la función f del apartado anterior en el punto $p = (1,1)$. $\boxed{\textbf{1 punto}}$

Solución: *La matriz Hessiana de* f *es*

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2\ln y & \frac{2x}{y} \\ \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \end{pmatrix}$$

y

$$Hf(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

El polinomio de Taylor de orden 2 es

$$\begin{aligned} P_2(x,y) &= f(1,1) + \nabla f(1,1) \cdot (x-1, y-1) + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x-1 & y-1 \end{pmatrix} Hf(1,1) \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} \\ &= y - 1 + 2(x-1)(y-1) - \frac{1}{2}(y-1)^2 \end{aligned}$$

(5) Sea $f(x,y,z) = x + z$ y considérese la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

(a) Verifique que se cumplen las condiciones del teorema de Lagrange, escriba las ecuaciones de Lagrange y obtenga las soluciones de dichas ecuaciones. **1 punto**

Solución: *La función objetivo f y la función de restricción $h(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ son ambas de clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}^3$ (de hecho son de clase $\mathcal{C}^n$, para cualquier n). Además, el gradiente de h es $\nabla h(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$, que es distinto de cero en todos los puntos de la esfera, luego se satisfacen las hipótesis del teorema de los multiplicadores de Lagrange, por el cual se puede afirmar que los extremos relativos de f sobre la esfera son en particular puntos críticos de la función de Lagrange:*

$$L_\lambda(x,y,z) = x + z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1),$$

para un cierto $\lambda \in \mathbb{R}$. Así pues, los posibles extremos relativos de f en la esfera satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{\partial L_\lambda}{\partial x}(x,y,z) & = 1 + 2x\lambda = 0 \\ \frac{\partial L_\lambda}{\partial y}(x,y,z) & = 2y\lambda = 0 \\ \frac{\partial L_\lambda}{\partial z}(x,y,z) & = 1 + 2z\lambda = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 & = 1 \end{array}\right.$$

Se trata de un sistema no lineal de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas. En primer lugar, se observa que $\lambda \neq 0$, pues en otro caso se llegaría a una contradicción en la primera y tercera ecuación. Así pues, por la segunda ecuación $y = 0$. Por otro lado, de la primera y tercera ecuación se deduce que $x = z$ y llevando estas igualdades a la última ecuación se concluye que $x = z = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, por lo que se tienen los puntos críticos $P_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, para $\lambda = -1/\sqrt{2}$ y $P_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ para $\lambda = 1/\sqrt{2}$.

(b) Determine los extremos relativos de f en la esfera. Determine si estos puntos son extremos locales o globales. Justifique la respuesta. **1 punto**

Solución: *Para clasificar los puntos críticos utilizamos las condiciones de segundo orden. La matriz Hessiana de la Lagrangiana es*

$$\mathcal{H}L_\lambda(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda \end{pmatrix}$$

Para el punto P_1 la matriz Hessiana es definida negativa, por lo que en P_1 se alcanza un máximo relativo y en P_2 la Hessiana es definida positiva, por lo que en P_2 se alcanza un mínimo relativo. Por otro lado, se observa que la función objetivo es continua y la esfera es un conjunto compacto, por lo que el Teorema de Weierstrass garantiza que f alcanza el máximo y mínimo globales en la esfera. Así pues, dichos extremos globales tienen que ser P_1 y P_2, puesto que son las únicas soluciones de las ecuaciones de Lagrange. Luego en P_1 se alcanza, de hecho, el máximo global y en P_2 el mínimo global de f en la esfera.