(1) *Consider the set* $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2, \quad y \geq x^2\}$.

(a) *Draw set A, its boundary and interior set. Discuss whether A is open, closed, bounded, compact and/or convex. Clearly explain your answer.*

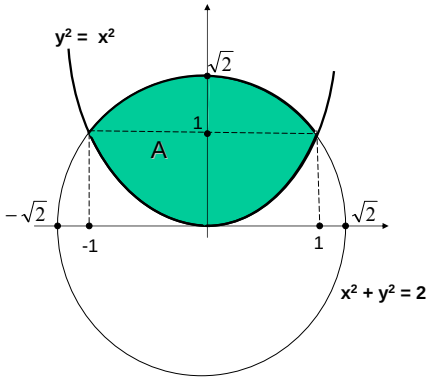
(b) *Consider the function*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2+(y-1)^2} & \text{if } (x, y) \neq (0, 1), \\ 0 & \text{if } (x, y) = (0, 1). \end{cases}$$

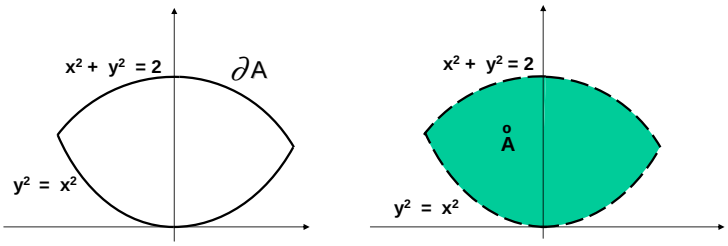
Determine if this function achieves a maximum in A. Does it achieve a minimum?

Solución:

(a) El conjunto $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2, \}$ es un disco de radio $\sqrt{2}$ y centro $(0, 0)$. El conjunto $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$ es una parábola. Además $A = B \cap C$. Gráficamente,



La frontera y el interior están representados en la figura siguiente



Como $\partial(A) \subset A$, el conjunto A es cerrado. El conjunto es acotado, ya que esta contenido en $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2, \}$ el disco de radio $\sqrt{2}$ y centro $(0, 0)$. Los conjuntos B y C son convexos. Por lo tanto, $A = B \cap C$ también es convexo.

(b) $\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x, y) = \infty$ y $(0, 1) \in A$. Por lo tanto, $f(x, y)$ no puede alcanzar un máximo absoluto en A. Por otra parte, observamos que $f(x, y) \geq 0$ para todo $(x, y) \in A$ y que $f(0, 1) = 0$. Por lo tanto, el punto $(0, 1)$ es un mínimo global de f en A.

(2) *Consider the following system of equations*

$$\begin{cases} y^2+z^2-x^2 &= -4 \\ e^{y-1}+x-z^2 &= 0 \end{cases}$$

(a) *Show that the above system of equations determines y and z as differentiable functions of x in a neighborhood of the point $(3,1,2)$.*

(b) *Let $y(x)$, $z(x)$ be the functions found in part (a). Compute the derivatives $y'(3)$ y $z'(3)$.*

Solución:

(a) Consideremos las funciones

$$f_1 = y^2+z^2-x^2+4$$
$$f_2 = e^{y-1}+x-z^2$$

Estas funciones son de clase C^1. Además se comprueba fácilmente que el punto $(3,1,2)$ es una solución del sistema

$$f_1(3,1,2) = f_2(3,1,2) = 0$$

Ahora comprobamos que

$$\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(y,z)}(3,1,2) = \det\left.\begin{pmatrix} 2y & 2z \\ e^{y-1} & -2z \end{pmatrix}\right|_{x=3,y=1,z=2} = \det\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = -12 \neq 0$$

Por lo que se verifican las hipótesis del Teorema de la Función implícita.

(b) Derivamos el sistema respecto a x

$$\begin{cases} 2yy'+2zz'-2x &= 0 \\ y'e^{y-1}+1-2zz' &= 0 \end{cases}$$

Ahora sustituimos $x=3$, $y=1$, $z=2$ con lo que obtenemos

$$\begin{cases} 2y'(3)+4z'(3)-6 &= 0 \\ y'(3)+1-4z'(3) &= 0 \end{cases}$$

de donde obtenemos

$$y'(3) = \frac{5}{3}, \quad z'(3) = \frac{2}{3}$$

(3) *Consider the function*

$$f(x,y) = x^2 - y^2 - 2xy - x^3$$

(a) *Determine the greatest open and convex set S of $\mathbb{R}^2$ where the function f is concave.*

(b) *Determine whether f achieves global extrema over the set S that you identified in the answer to the previous question.*

Solución:

(a) El gradiente de f es

$$\nabla f = (2x - 2y - 3x^2, -2y - 2x)$$

La matriz Hessiana de f es

$$Hf = \begin{pmatrix} 2-6x & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

f es cóncava para los valores de x e y que hacen el hessiano definido negativo o semidefinido negativo. Para determinar esto último calculamos sus menores,

$$D_1 = 2 - 6x, \quad D_2 = 12x - 8$$

Luego f es cóncava si y sólo si $D_1 < 0$ y $D_2 > 0$, es decir, si y sólo si $x > 1/3$ y $x > 8/12 = 2/3$. Como $2/3 > 1/3$, es suficiente la segunda solución. Así, f es cóncava en el conjutno

$$S = \{(x,y) : x > 2/3\}$$

(b) La función f es diferenciable. Los puntos críticos de f son las soluciones de $\nabla f = (0,0)$, o equivalentemente

$$\begin{aligned} 2x - 2y - 3x^2 &= 0 \\ -x - y &= 0 \end{aligned}$$

cuyas soluciones son

$$(x,y) = (0,0), \quad (x,y) = (4/3, -4/3)$$

El punto $(0,0)$ no está en S. El punto $(4/3,-4/3)$ sí está en S. Este conjunto es convexo y f es cóncava en S. Por lo tanto, $(4/3,-4/3)$ es un máximo global de f en S. No hay mínimo, ni local ni global, en S.

(4) *Consider the function*

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy$$

and the set

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 2\}$$

(a) *Write the Lagrange's equations that are needed to identify the extrema of f on A.*

(b) *Determine the global extrema of f on A, and clearly argue whether they are a minimum or a maximum.*

Solución:

(a) El Lagrangiano es

$$L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - 2xy - \lambda(x^2 + y^2 - 2)$$

por lo que las ecuaciones de Lagrange son

$$\begin{aligned} 2x - 2y - 2x\lambda &= 0 \\ 2y - 2x - 2y\lambda &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 2 \end{aligned}$$

(b) En primer lugar simplificamos las ecuaciones a

$$\begin{aligned} (1-\lambda)x &= y \\ (1-\lambda)y &= x \\ x^2 + y^2 &= 2 \end{aligned}$$

De las dos primeras ecuaciones vemos que

$$(1-\lambda)^2 y = y$$

Pero $y = 0$ no puede ser solución porque si sustuimos $y = 0$ en la segunda ecuación se obtiene que $x = 0$ y estos valores no verifican la tercera ecuación. Concluimos que $(1-\lambda)^2 = 1$ por lo que los valores posibles de λ son 0 y 2. Si $\lambda = 0$, obtenemos las soluciones $(1,1), (-1,-1)$. Si $\lambda = 2$, obtenemos las soluciones $(1,-1), (-1,1)$.
La matriz Hessiana de L es

$$\mathrm{H}\, L(x,y;\lambda) \begin{pmatrix} 2-2\lambda & -2 \\ -2 & 2-2\lambda \end{pmatrix}$$

Vemos que

$$\mathrm{H}\, L((x,y;0) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathrm{H}\, L((x,y;2) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

En ningún caso es definida por lo que las condiciones de segundo orden no son informativas. En los puntos $(1,1)$ y $(-1,-1)$ tenemos que

$$\nabla(x^2+y^2-2)|_{x=y=1} = (2x,2y)|_{x=y=1} = (2,2), \quad \nabla(x^2+y^2-2)|_{x=y=-1} = (2x,2y)|_{x=y=-1} = -(2,2)$$

por lo que

$$T_{(1,1)}M = T_{(-1,-1)} = \{(v_1,v_2) = (2,2)\cdot(v_1,v_2) = 0\} = \{(t,-t) = t \in \mathbb{R}\}$$

Obtenemos la forma cuadrática

$$(t,-t)\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -t \\ -t \end{pmatrix} = 8t^2$$

que es definida positiva, por lo que los puntos $(1,1), (-1,-1)$ son mínimos globales.
En los puntos $(-1,1)$ y $(1,-1)$ tenemos que

$$T_{(-1,1)}M = T_{(1,-1)} = \{(v_1,v_2) = (-2,2)\cdot(v_1,v_2) = 0\} = \{(t,t) = t \in \mathbb{R}\}$$

Obtenemos la forma cuadrática

$$(t,-t)\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -t \\ -t \end{pmatrix} = -8t^2$$

que es definida negativa, por lo que los puntos $(-1,1), (1,-1)$ son máximos globales.
Una manera alternativa de clasificar los puntos críticos es la siguiente. El conjunto A es compacto y la función f es continua. Por el Teorema de Weierstrass, f alcanzan un máximo y un mínimo globales en A. Estos puntos extremos deben de satisfacer las ecuaciones de Lagrange. Calculando el valor de f en estos puntos vemos que

$$f(1,1) = f(-1-,1) = 0, \quad f(-1,1) = f(1-,1) = 4$$

por lo que en los puntos $(1,1)$ y $(-1-,1)$ se alcanza un mínimo global y en los puntos $(-1,1)$ y $(1-,1)$ se alcanza un máximo global.

(5) *Consider the following maximization problem*

$$\begin{aligned} \max_{x,y} \quad & x^2+y^2+y-1 \\ \textbf{\textit{s.a.}} \quad & x^2+y^2 \leq 1 \end{aligned}$$

(a) *Write the Kuhn-Tucker's equations that are needed to identify the extrema of f on A.*
(b) *Determine the feasible points that satisfy the Kuhn-Tucker's equations.*

Solución:

(a) La función x^2+y^2+y-1 es continua y el conjunto $\{x^2+y^2 \leq 1\}$ es compacto. Por el Teorema de Weierstrass existe un máximo y un mínimo global. Las funciones x^2+y^2+y-1 y x^2+y^2-1 son de clase C^∞ y se verifica la condición de regularidad. El Lagrangiano del problema es

$$L = x^2+y^2+y-1+\lambda(1-x^2-y^2)$$

y las ecuaciones de Kuhn-Tucker son

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x - 2\lambda x = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2y + 1 - 2\lambda y = 0 \tag{2}$$

$$\lambda(x^2+y^2-1) = 0 \tag{3}$$

$$x^2+y^2 \leq 1 \tag{4}$$

$$\lambda \geq 0 \tag{5}$$

(b) Si $\lambda = 0$, entonces $x = 0$ (por la ecuación 1), $y = -1/2)$ (por la ecuación 2). Obtenemos la solución

$$x = 0, y = -1/2), \quad \lambda = 0$$

Si $\lambda \neq 0$, entonces $x^2+y^2-1 = 0$. La ecuación 1 se puede escribir como $x(1-\lambda)) = 0$. Si $x = 0$ entonces $y = \pm 1$. Si $y = 1$, de la la ecuación 2 vemos que $\lambda = 3/2$ y obtenemos la solución

$$x = 0, y = 1, \quad \lambda = \frac{3}{2}$$

Si $y = -1$, de la la ecuación 2 vemos que $\lambda = 1/2$ y obtenemos la solución

$$x = 0, y = -1, \quad \lambda = \frac{1}{2}$$

Finalmente, si $\lambda = 1$, de la ecuación 2 obtenemos que $2y + 1 - 2y = 0$, lo cual es imposible. Concluimos que las soluciones de las ecuaciones de Kuhn-Tucker son los puntos

$$\begin{aligned} x = 0, y = -1/2), \quad & \lambda = 0 \\ x = 0, y = 1, \quad & \lambda = \frac{3}{2} \\ x = 0, y = -1, \quad & \lambda = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Como

$$f(0,-1/2) = \frac{-5}{4}, \quad f(0,1) = 1, \quad f(0,-1) = -1$$

el mínimo global se alcanza en el punto $(0,-1/2)$ y el máximo global se alcanza en el punto $(0,1)$.