University Carlos III
Department of Economics
Mathematics II. Final Exam. June 2010

Last Name:		**Name:**
ID number:	**Degree:**	**Group:**

IMPORTANT

- **DURATION OF THE EXAM: 2h**
- Calculators are **NOT** allowed.
- **Scrap paper:** You may use the last two pages of this exam and the space behind this page.
- **Do NOT UNSTAPLE** the exam.
- You must show a valid ID to the professor.
- Read the exam carefully. Each part of the exam counts 1 point. Please, check that there are 10 pages in this booklet

Problem	Points
1	
2	
3	
4	
5	
Total	

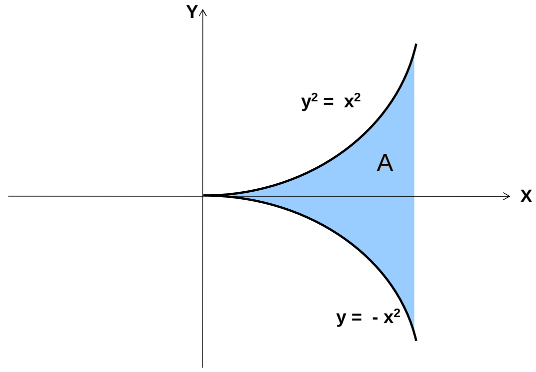
(1) *Consider the set* $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \le x^2, \quad x \ge 0\}$.

(a) *Draw the set* A*, its boundary and interior and determine wether* A *is open, closed, bounded, compact and/or convex. You must argue your answers.*

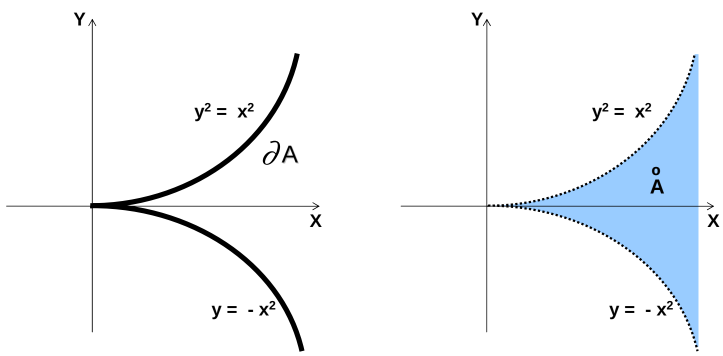
(b) *Consider the function* $f(x,y) = x + y^2$*. Determine if this function attains a maximum on* A*. Does it attain a minimum? If the answer to any of these questions is yes, find the extreme points of* f *on* A*.*

Solución:

(a) La desigualdad $|y| \le x^2$ es equivalente a $-x^2 \le y \le x^2$. El conjunto A puede escribirse como $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -x^2 \le y \le x^2, \quad x \ge 0\}$. La representación gráfica es



La frontera y el interior están representados en las siguientes figuras



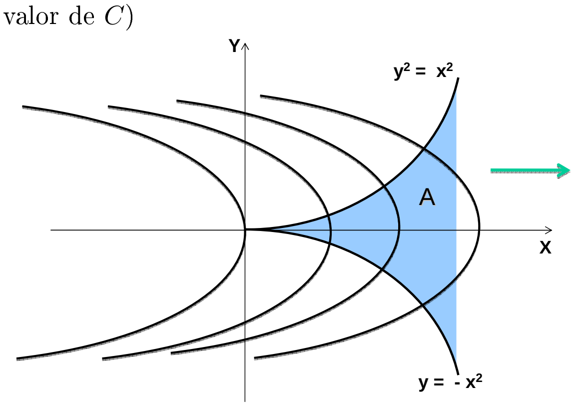
Como $\partial(A) \subset A$, el conjunto A es cerrado. No es abierto ya que el interior de A no coincide con A. El conjunto no es acotado ya que contiene todos los puntos de la forma $(n,0)$ para $n = 1, 2, \ldots$. El conjunto no es convexo porque los puntos $p = (0,0)$ y $q = (1,1)$ pertenecen a A pero la combinación convexa

$$(x,y) = \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}q = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \notin A$$

ya que

$$x^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 < \frac{1}{2} = |y|$$

(b) Las curvas de nivel de la función f son curvas de la form $x = C - y^2$ con $C \in \mathbb{R}$. La representación gráfica para diferentes valores de C es la siguiente (las flecha indica la dirección en la que el valor de f crece al aumentar el valor de C)



Gráficamente, vemos que el valor mínimo de f se alcanza en el punto $(0,0) \in$ y que f no alcanza un valor máximo en A.

(2) *Consider the following system of equations*

$$\left\{\begin{array}{rcl} z^3+3x-y-t^2 & = & 3 \\ \ln y + x - z^2 & = & 0 \end{array}\right.$$

(a) *Prove that the above system of equations determines the variables y, z as differentiable functions of x and t in a neighbourhood of the point $(x,y,z,t)=(1,1,1,0)$.*

(b) *Let $y(x,t)$ be the function whose existence has been proved in part (a). Write the equation of the plane tangent to the graph of y at the point $(x,t;y(x,t))=(1,0;1)$.*

Solución:

(a) Consideremos las funciones

$$f_1(x,y,z,t)=z^3+3x-y-t^2-3$$
$$f_2(x,y,z,t)=\ln y+x-z^2$$

Estas funciones son de clase C^1. Además se comprueba fácilmente que el punto $((1,1,1,0)$ es una solución del sistema

$$f_1(1,1,1,0)=f_2(1,1,1,0)=0$$

Ahora comprobamos que

$$\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(y,z)}(1,1,1,0)=\det\left(\begin{array}{cc} -1 & 3z^2 \\ \frac{1}{y} & -2z \end{array}\right)\Bigg|_{x=1,y=1,z=1,t=0}=\det\left(\begin{array}{cc} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{array}\right)=-1\neq 0$$

por lo que se verifican las hipótesis del Teorema de la Función implícita y podemos despejar las variables y, z como funciones diferenciables de x y t en un entorno del punto $(x,y,z,t)=(1,1,1,0)$.

(b) Derivamos el sistema respecto a x

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3z^2\frac{\partial z}{\partial x}+3-\frac{\partial y}{\partial x} & = & 0 \\ \frac{1}{y}\frac{\partial y}{\partial x}+1-2z\frac{\partial z}{\partial x} & = & 0 \end{array}\right.$$

Ahora sustituimos $x=1$, $y=1$, $z=1$, $t=0$, con lo que obtenemos

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3\frac{\partial z}{\partial x}(1,0)+3-\frac{\partial y}{\partial x}(1,0) & = & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial x}(1,0)+1-2\frac{\partial z}{\partial x}(1,0) & = & 0 \end{array}\right.$$

Resolviendo este sistema, obtenemos

$$\frac{\partial y}{\partial x}(1,0)=-9, \quad \frac{\partial z}{\partial x}(1,0)=-4$$

Derivamos el sistema respecto a t

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3z^2\frac{\partial z}{\partial t}-\frac{\partial y}{\partial t}-2t & = & 0 \\ \frac{1}{y}\frac{\partial y}{\partial t}-2z\frac{\partial z}{\partial t} & = & 0 \end{array}\right.$$

Ahora sustituimos $x=1$, $y=1$, $z=1$, $t=0$, con lo que obtenemos

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3\frac{\partial z}{\partial t}-\frac{\partial y}{\partial t} & = & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial t}-2\frac{\partial z}{\partial t} & = & 0 \end{array}\right.$$

Resolviendo este sistema, obtenemos

$$\frac{\partial y}{\partial t}(1,0)=0, \quad \frac{\partial z}{\partial t}(1,0)=0$$

La ecuación del plano tangente a la gráfica de y en el punto $(x,t;y(x,t))=(1,0;1)$ es

$$y=y(1,0)+\frac{\partial y}{\partial x}(1,0)(x-1)+\frac{\partial y}{\partial t}(1,0)(t-0)=1-9(x-1)$$

(3) *Suppose a monopoly produces three different products, whose inverse demands are given by the following functions*

$$p_1 = 45 - 4q_1$$
$$p_2 = 29 - 3q_2$$
$$p_3 = 21 - 2q_3$$

where q_1, q_2 *y* q_3 *are the quantities demanded and* p_1, p_2 *y* p_3 *are their respective prices. The cost function is* $C(Q) = 20 + 5Q + Q^2$ *with* $Q = q_1 + q_2 + q_3$.

(a) *Write the function of net profit* $B(q_1, q_2, q_3)$ *(that is, revenue minus cost) as a function of the amounts demanded. Determine wether the profit function* $B(q_1, q_2, q_e)$ *is concave or convex.*

(b) *Compute the levels of demand* q_1, q_2 *y* q_3 *that maximize the profit of the monopoly. Justify that these amounts that you have obtained are a global maximum of the function* $B(q_1, q_2, q_e)$.

Solución:

(a) La función de beneficios viene dada por

$$\begin{aligned} B(q_1,q_2,q_e) &= q_1(45-4q_1) + q_2(29-3q_2) + q_3(21-2q_3) - \big(20 + 5(q_1+q_2+q_3) + (q_1+q_2+q_3)^2\big) \\ &= 40q_1 + 24q_2 + 16q_3 - 5q_1^2 - 4q_2^2 - 3q_3^2 - 2q_1q_2 - 2q_1q_3 - 2q_2q_3 - 20 \end{aligned}$$

Para determinar si la la función de beneficios $B(q_1, q_2, q_e)$ es cóncava o convexa, calculamos su matriz Hessiana

$$\mathrm{H}\, B(q_1,q_2,q_e) = \begin{pmatrix} -10 & -2 & -2 \\ -2 & -8 & -2 \\ -2 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

Los menores principales son

$$d_1 = -10 < 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} -10 & -2 \\ -2 & -8 \end{vmatrix} = 76 > 0, \quad D_3 = \begin{vmatrix} -10 & -2 & -2 \\ -2 & -8 & -2 \\ -2 & -2 & -6 \end{vmatrix} = -400 < 0$$

Vemos que la matriz Hessiana es definida negativa. Por lo tanto la función de beneficios es estricamente cóncava en todo $\mathbb{R}^3$.

(b) Para obtener el/los extremos se identifican los puntos críticos, es decir, los puntos para los cuales $\nabla B(q_1, q_2, q_e) = (0, 0, 0)$. Dado que la función de beneficios es derivable en todo su dominio, no hay más puntos críticos que los que hacen cero el gradiente.

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial q_1} &= -10q_1 - 2q_2 - 2q_3 + 40 = 0 \\ \frac{\partial B}{\partial q_2} &= -8q_2 - 2q_1 - 2q_3 + 24 = 0 \\ \frac{\partial B}{\partial q_3} &= -6q_3 - 2q_1 - 2q_2 + 16 = 0 \end{aligned}$$

La solución de este sistema es

$$q_1 = \frac{86}{25} \approx 3.44, \quad q_2 = \frac{48}{25} \approx 1.92, \quad q_3 = \frac{22}{25} \approx 0.88$$

Como la función de beneficios es cóncava en todo $\mathbb{R}^3$, el punto crítico corresponde a un máximo global de B.

(4) *Consider the function* $f(x,y,z) = 3ax^2 + axz + aby^2 + 3az^2$ *with* $a, b \in \mathbb{R}$.
(a) *Find the values of* $a, b \in \mathbb{R}$ *for which the function* f *is convex.*
(b) *Find the values of* $a, b \in \mathbb{R}$ *for which the function* f *is concave.*

Solución:

(a) El Lagrangiano asociado al problema es

$$L(x,y,z) = x^2 - y^2 + 2xy - \frac{z^2}{2} + 6 + \lambda(z - 2x - 2y + 1)$$

Las ecuaciones de Lagrange son

$$\begin{aligned} 2x + 2y - 2\lambda &= 0 \\ -2y + 2x - 2\lambda &= 0 \\ -z + \lambda &= 0 \\ 2x + 2y - 1 &= z \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} x + y &= \lambda \\ x - y &= \lambda \\ z &= \lambda \\ 2x + 2y - 1 &= z \end{aligned}$$

(b) De las dos primeras ecuaciones obtenemos $x + y = x - y$ que implica que $y = 0$. Por lo tanto, las ecuaciones se reducen a

$$\begin{aligned} x &= \lambda \\ z &= \lambda \\ 2x - 1 &= z \end{aligned}$$

Obtenemos que $\lambda = z = 2\lambda - 1$ por lo que $\lambda = x = 1$. La solución es $x = 1$, $y = 0$, $z = 1$.

(5) *Consider the following maximization problem* $f(x,y) = x^2 - 6x + y^2 + 9$ *in the set* $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

(a) *Justify that the function* f *has extreme points (i.e. maxima and/or minima) on the set* A. *Write the Kuhn-Tucker equations that determine the extreme points of* f *on* A.

(b) *Compute the points that satisfy the Kuhn-Tucker equations. Determine at which points does the function* f *attain a maximum on* A *and at which points does it attain a minimum.*

Solución:

(a) La función $f(x,y) = y(x-1)$ es continua y el conjunto $\{(x-1)^2 + y^2 \leq 2\}$ es compacto. Por el Teorema de Weierstrass existe un máximo y un mínimo global. Las funciones $y(x-1)$ y $(x-1)^2 + y^2 - 2$ son de clase C^∞ y se verifica la condición de regularidad. El Lagrangiano del problema es

$$L = y(x-1) + \lambda(2 - (x-1)^2 - y^2)$$

y las ecuaciones de Kuhn-Tucker son

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= y - 2\lambda(x-1) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= x - 1 - 2\lambda y = 0 \\ \lambda(2 - (x-1)^2 - y^2) &= 0 \\ (x-1)^2 + y^2 &\leq 2 \\ \lambda &\geq 0 \end{aligned}$$

(b) Con $\lambda = 0$ obtenemos la solución $x = 1$, $y = 0$. Buscamos ahora las soluciones con $\lambda \neq 0$. Suponiendo esto, las ecuaciones de Kuhn-Tucker son

$$y = 2\lambda(x-1) \tag{1}$$
$$x - 1 = 2\lambda y \tag{2}$$
$$(x-1)^2 + y^2 = 2 \tag{3}$$
$$\lambda > 0 \tag{4}$$

Sustituyendo $x - 1 = 2\lambda y$ en la ecuación (1), obtenemos que $4\lambda^2 y = y$. Una posible solución es $y = 0$ y de nuevo obtenemos $x = 1$. Pero esto no es compatible con $(x-1)^2 + y^2 = 2$. Concluimos que $y \neq 0$ y, por lo tanto

$$\lambda^2 = \frac{1}{4}$$

Como $\lambda > 0$ obtenemos

$$\lambda = \frac{1}{2}$$

Las ecuaciones de Kuhn-Tucker se reducen a

$$\begin{aligned} y &= x - 1 \\ (x-1)^2 + y^2 &= 2 \\ \lambda &= 1/2 \end{aligned}$$

Sustityendo $y = x - 1$ en la segunda ecuación, obtenemos que $2y^2 = 2$ es decir, $y = \pm 1$. Por tanto, también obtenemos las soluciones

$$x = 2, y = 1, \lambda = \frac{1}{2}, \qquad x = 0, y = -1, \lambda = \frac{1}{2}$$

Como $f(1,0) = 0$, $f(2,1) = 1 = f(0,-1)$ el valor máximo se alcanza en los puntos $(2,1)$ y $(0,-1)$.