(1) *Consider the following system of linear equations*

$$\left\{\begin{array}{lcl} x+(k+1)y+2z & = & -1 \\ kx+y+z & = & k \\ (k-1)\,x-2y-z & = & k+1 \end{array}\right.$$

where $k\in\mathbb{R}$ is a constant.

(a) *Classify the system according to the values of k.*

(b) *Solve the above system for the values of k for which the the system has infinitely many solutions. How many parameters are needed to describe the solution?*

Solución:

(a) La matriz ampliada del sistema es

$$(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k+1 & 2 & -1 \\ k & 1 & 1 & k \\ k-1 & -2 & -1 & k+1 \end{array}\right)$$

Haciendo operaciones elementales por filas obtenemos

$$(f_3\mapsto -f_3+f_2)\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k+1 & 2 & -1 \\ k & 1 & 1 & k \\ 1 & 3 & 2 & -1 \end{array}\right)\quad (f_3\mapsto -f_3+f_1)\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k+1 & 2 & -1 \\ k & 1 & 1 & k \\ 0 & k-2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Si $k=2$ entonces el sistema es equivalente al sistema asociado a la matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

y vemos que $\operatorname{rango}(A)=\operatorname{rango}(A|B)=2$ por lo que el sistema es compatible indeterminado con un parámetro. Supongamos que $k\neq 2$. Dividiendo la tercera fila por $k-2$, el sistema es equivalente al sistema cuya matriz asociada es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k+1 & 2 & -1 \\ k & 1 & 1 & k \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k+1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 1 & k \end{array}\right)\begin{array}{c}(f_1\mapsto f_1-(k+1)f_2) \\ (f_3\mapsto f_3-f_2)\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ k & 0 & 1 & k \end{array}\right)$$

$$(f_3\mapsto f_3-kf_1)\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-2k & 2k \end{array}\right)$$

Si $k\neq 1/2, k\neq 2$, entonces $\operatorname{rango}(A)=\operatorname{rango}(A|B)=3$ y el sistema es compatible determinado. Si $k=1/2$ el sistema es equivalente a otro sistema cuya matriz asociada es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

y como $\operatorname{rango}(A)=2, \operatorname{rango}(A|B)=3$ en este caso el sistema es incompatible.

(b) El sistema es compatible indeterminado si $k=2$. En este caso, el sistema original es equivalente al siguiente sistema de ecuaciones

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Eligiendo z como parámetro el conjunto se soluciones es

$$\left\{\left(\frac{7}{5}-\frac{z}{5},-\frac{4}{5}-\frac{3z}{5},z\right):z\in\mathbb{R}\right\}$$

(2) *Consider the function* $f(x,y) = 3x\ln(x^2 - y)$, *the point* $p = (2,3)$ *and the vector* $v = (1,2)$.

(a) *Find the directional derivative of the function* f *at the point* p *in the direction of the vector* v.

(b) *What is the direction of maximal growth of* f *at the point* p? *What is the maximal value of the directional derivative of* f *at the point* p?

Solución:

(a) La función f es diferenciable en su dominio $\{(x, y \in \mathbb{R}^2 : x^2 > y\}$. Por lo tanto, podemos utilizar la fórmula

$$D_v f(p) = \nabla f(p) \cdot v$$

Como

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=2,y=3} = \left. 3\ln(x^2 - y) + 3x\frac{2x}{x^2 - y}\right|_{x=2,y=3} = 24$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x=2,y=3} = \left. 3x\frac{-1}{x^2 - y}\right|_{x=2,y=3} = -6$$

Vemos que

$$\nabla f(2,3) = (24,-6), \quad \|\nabla f(2,3)\| = \|(24,-6)\| = \sqrt{24^2 + 6^2} = 6\sqrt{17}$$

por lo que la solución es

$$\frac{D_v f(p)}{\|v\|} = \frac{12}{\sqrt{5}}$$

(b) El valor máximo de la derivada direccional en el punto $(2,3)$ es

$$\|\nabla f(2,3)\| = \|(24,-6)\| = \sqrt{24^2 + 6^2} = 6\sqrt{17}$$

La dirección de mayor crecimiento de f en el punto $(2,3)$ es la determinada por $\nabla f(2,3) = (24,-6)$, es decir

$$\frac{\nabla f(2,3)}{\|\nabla f(2,3)\|} = \frac{1}{6\sqrt{17}}(24,-6) = \left(\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{-1}{\sqrt{17}}\right)$$

(3) *Consider the function* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{5xy}{x^2+y^2} & \text{if } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{if } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) *Study if the function* f *is continuous at the point* $(0,0)$. *Study at which points of* $\mathbb{R}^2$ *the function* f *is continuous.*

(b) *Argue in which of the following sets we may apply the Theorem of Weierstrass to show that the above function* f *attains a global extremum on the set*

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq 4\}$$
$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\}$$
$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-3)^2 + y^2 \leq 1\}$$

Solución:

(a) Estudiamos primero el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. Tomando el límite a través de rectas de la forma $y = mx$ vemos que

$$\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{5mx^2}{x^2+m^2x^2} = \frac{5m}{1+m^2}$$

Como este límite depende de m, el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe. La función f no es contina en el punto $(0,0)$. La función f es continua en el conjunto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ya que es un cociente de polinomios y el denominador no se anula si $(x,y) \neq (0,0)$.

(b) El Teorema de Weierstrass no puede aplicarse en el conjunto A porque la función f no es continua en $(0,0)$ y $(0,0) \in A$. Tampoco puede aplicarse al conjunto B porque este conjunto no es acotado. El Teorema de Weierstrass puede aplicarse en el conjunto C ya que es compacto y f es continua en ese conjunto, porque $(0,0) \notin C$.

(4) *A company sells two goods A and B. The total profits obtained from the sale of x_1 units of A and x_2 units of B is the following:*

$$I(x_1, x_2) = -x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 4x_1 + 8x_2 \qquad (x_1 \text{ and } x_2 \text{ in thousands of units})$$

(a) *Find the amounts x_1 and x_2 which maximize the profits.*

(b) *Argue why can we be sure that the amount obtained in part (a) is a global maximum of the function $I(x_1, x_2)$*

Solución:

(a) Las derivadas parciales de f son

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x_1 - 2x_2 + 4$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2x_1 - 6x_2 + 8$$

Los puntos críticos son las soluciones del sistema $\nabla f(x, y) = 0$, es decir,

$$-2x_1 - 2x_2 + 4 = 0$$
$$-2x_1 - 6x_2 + 8 = 0$$

La única solución de este sistema es $x_1 = x_2 = 1$.

(b) El Hessiano de f es

$$\mathrm{H}\, f(x, y) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$$

Como $D_1 = -2 < 0$ y $D_2 = 8 > 0$, $\mathrm{H}\, f(x, y)$ es definido negativo en todo $\mathbb{R}^2$. La función f es cóncava en todo $\mathbb{R}^2$ y todos los puntos críticos son máximos globales de f.

(5) *Consider the following maximization problem*

$$\begin{aligned} \max_{x,y} \quad & (x-1)^2 - y \\ \textbf{\textit{s.t.}} \quad & -2x + y \leq 2 \\ & x + y \leq 5 \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

(a) *Find the Kuhn-Tucker equations that determine the extreme points of f and draw the feasible set.*

(b) *Which restrictions are binding at the point $A = (1,0)$? Show that the point $A = (1,0)$ verifies the Khun-Tucker equations for the problem above.*

Solución:

(a) El recinto del conjunto factible es el triángulo de vértices (1,4), (5,0) y (-1,0).
Transformamos la última restricción en $-y \leq 0$, y el Lagrangiano queda: $L(x,y) = (x-1)^2 - y + \lambda_1(2 - (-2x+y)) + \lambda_2(5 - (x+y)) + \lambda_3(0+y)$ de aquí obtenemos las ecuaciones:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial x}(x,y) = 2x - 2 + 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ &\frac{\partial L}{\partial y}(x,y) = -1 - \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ &\lambda_1(2 - (-2x+y)) = 0 \\ &\lambda_2(5 - (x+y)) = 0 \\ &\lambda_3(0+y) = 0 \\ &-2x + y \leq 2 \\ &x + y \leq 5 \\ &-y \leq 0 \\ &\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3 \geq 0 \end{aligned}$$

(b) Sustituyendo el punto en cada una de las tres restricciones obtenemos que si bien satisface las tres restricciones, sólo la tercera se convierte en una igualdad, por lo tanto sólo la tercera está activa.
Se trata ahora de ver si para el punto $(1,0)$ existen valores λ_1, λ_2 y λ_3 que hacen ciertas las ecuaciones obtenidas en el primer apartado. Hemos visto que la primera y segunda restricciones se satisfacen pero al no estar activas tenemos que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Sustituyendo los valores $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ y las coordenadas del punto $x = 1$ e $y = 0$ en la primera y segunda ecuación obtenemos:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial x}(x,y) = 2 \cdot 1 - 2 = 0 \\ &\frac{\partial L}{\partial y}(x,y) = -1 + \lambda_3 = 0 \end{aligned}\right\}$$

de donde $\lambda_3 = 1 \geq 0$. Por lo tanto el punto $(1,0)$ sí satisface las ecuaciones.