Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía   Examen final de Matemáticas I   20 de enero de 2003

APELLIDOS:		**NOMBRE:**
DNI:	**Titulación:**	**Grupo:**

MODELO 1:

1. **Sea** $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \pi^2,\ y \geq \operatorname{sen} x\right\}$. **Se pide:**

a) Representar el conjunto A.

b) Consideramos en $\mathbb{R}^2$ el orden de Pareto definido por $(x_0,y_0) \leq_P (x_1,y_1) \Leftrightarrow x_0 \leq x_1,\ y_0 \leq y_1$.
Hallar el conjunto de puntos maximales y minimales, máximo y mínimo de A.

1 punto

2. a) Enunciar el teorema de los ceros de Bolzano.

b) Comprobar cuáles de las siguientes funciones satisfacen las hipótesis del Teorema de Bolzano y cuáles no en los intervalos indicados:

$$f(x) = 2x - \frac{4}{x} \quad \text{en} \quad [-1,2]; \quad g(x) = \ln\left(\frac{x-1}{4}\right) \quad \text{en} \quad [2,4]; \quad h(x) = e^x - x^2 \quad \text{en} \quad [-1,1]$$

c) ¿Alguna de las funciones anteriores no satisface las hipótesis del teorema de Bolzano y sí su conclusión en el intervalo correspondiente?

1,5 puntos

3. **Dada la función definida por** $f(x) = \begin{cases} 4x - 3 & si\ x \leq 2 \\ \dfrac{10}{x} & si\ 2 < x < 5 \\ ax^2 + b & x \geq 5 \end{cases}$

a) Hallar a y b para que $f(x)$ sea continua y derivable en $x = 5$.
b) Representar la función f con los valores de a y b hallados en el apartado anterior.
c) Estudiar la concavidad, convexidad y puntos de inflexión de f.

1,5 puntos

4. **Sea** $y = f(x)$ **la función definida de forma implícita mediante la ecuación** $(x^2 + y^3)^2 = 2xy + 3x - 2$**, en un entorno del punto** $(1, 0)$**.**

a) Calcular $f'(x)$.

b) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(1, 0)$.

1 punto

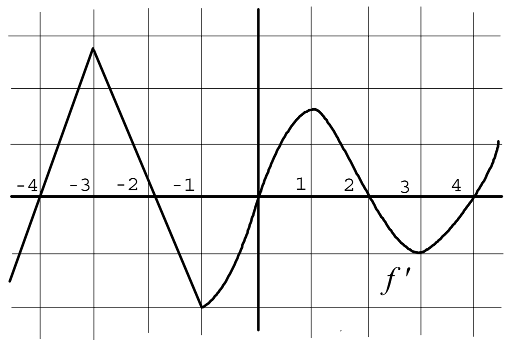
5. **La siguiente figura muestra la gráfica de la derivada de** f.

a) Hallar los intervalos de crecimiento, decrecimiento y los extremos locales de f.

b) Hallar los intervalos de concavidad, convexidad y los puntos de inflexión de f.

c) Considérese f definida en $[-3,-1]$. Hallar los extremos globales de f en dicho intervalo.

1,5 puntos



6. **Sean** $C(x) = 1200 + 2x + 0,03x^2$ **y** $p(x) = 30 - \frac{x}{50}$ **las funciones de coste y de demanda, respectivamente, de una empresa monopolista. Se pide:**

a) Hallar la producción x donde se alcanza el máximo beneficio.

b) ¿Cuál es la producción x que minimiza el coste medio?

1 punto

7. a) Hallar $\int \frac{x-3}{x^2-3x+2}\,dx$

b) Dada $F(x) = \int_3^x \frac{t-3}{t^2-3t+2}\,dt$, calcular el polinomio de Taylor de segundo orden de F centrado en $a = 3$.

c) Utilizando el polinomio anterior, calcular aproximadamente $F(3.2)$ y $F(2.9)$.

1'5 puntos

8. **Dada la función** $F(x) = \int_0^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}}$. **Se pide**:

a) Estudiar el crecimiento, decrecimiento y extremos locales de F.

b) Discutir si F es par o impar.

Indicación: determinar primero la simetría de la función $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}}$

1 punto