Ejercicio	1	2	3	4	5	6	7	8	total
Puntos									

Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía   Examen final de Matemáticas I   5 de septiembre de 2008

APELLIDOS:		**NOMBRE:**
DNI:	**Titulación:**	**Grupo:**

1. **Sea** $A = \{(x,y) : x^2 + 2x \leq y \leq 4 - x^2\}$. **Consideramos en** $\mathbb{R}^2$ **el orden de Pareto definido por** $(x_0,y_0) \leq_P (x_1,y_1) \Leftrightarrow x_0 \leq x_1,\ y_0 \leq y_1$. **Se pide**:

a) Representar gráficamente el conjunto A, y hallar los puntos maximales y minimales, así como el máximo y el mínimo del conjunto A, si existen.

b) Calcular el área de dicho conjunto A.

1 punto

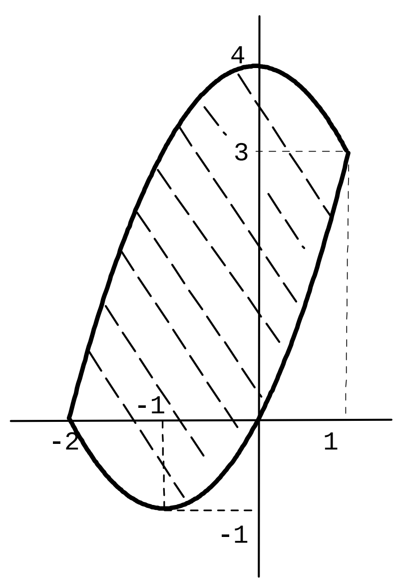
a) En primer lugar, hallemos los puntos de corte de las funciones $x^2 + 2x$ y $4 - x^2$. Ahora bien, $x^2 + 2x = 4 - x^2 \iff 2x^2 + 2x - 4 = 0 \iff x = -2, x = 1$.

Luego los puntos de corte de dichas parábolas son $(-2,0), (1,3)$.

La parábola convexa $x^2 + 2x$ tiene un mínimo en el punto $(-1,-1)$.

La parábola cóncava $4 - x^2$ tiene un máximo en el punto $(0,4)$.

Por lo tanto, el conjunto es, aproximadamente, el siguiente:



A partir del dibujo se deduce que:
maximales (A)=$\{(x,y)\,:\,0\leq x\leq 1, y=4-x^2\}$
minimales (A)=$\{(x,y)\,:\,-2\leq x\leq -1, y=x^2+2x\}$
El conjunto no tiene ni máximo ni mínimo.
.
b) Como la función x^2+2x queda, en el conjunto A, por debajo de la parábola $4-x^2$, y los puntos de corte de ambas funciones son -2 y 1, el área vale:
Área (A)=$\int_{-2}^{1}[4-x^2-(x^2+2x)]dx=\int_{-2}^{1}[4-2x^2-2x)]dx=[4x-\frac{2}{3}x^3-x^2]_{-2}^{1}=$
$=[4-\frac{2}{3}-1]-[-8-\frac{2}{3}(-8)-4]=\frac{7}{3}+[12-\frac{16}{3}]=\frac{27}{3}=9.$

2. **Sea la función** $f(x) = \dfrac{\ln(2x-1)}{2x-1}$**. Se pide:**

a) Hallar el dominio, los puntos de corte con los ejes, así como la posición de la gráfica respecto al eje horizontal.

b) Hallar los intervalos de crecimiento / decrecimiento de *f*, así como sus extremos locales y/o globales.

c) Hallar las asíntotas de esta función, su imagen, y representar la gráfica.

1'5 puntos

---

a) La función está bien definida cuando $2x-1 > 0$ o, equivalentemente, en el intervalo $(\frac{1}{2},\infty)$.

La función no puede cortar al eje vertical (no está definida en el 0) y cortará al eje horizontal cuando se anule el logaritmo, es decir, cuando $2x-1 = 1 \Leftrightarrow x = 1$.

Finalmente, como el denominador siempre es positivo en el dominio de definición, la gráfica de la función quedará por

encima del eje horizontal cuando $2x-1 > 1$, es decir, en el intervalo $(1,\infty)$, y debajo del eje horizontal en el intervalo $(\frac{1}{2},1)$.

.

b) Calculemos la derivada de *f* :

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{2x-1}(2x-1) - 2\ln(2x-1)}{(2x-1)^2} = \frac{2(1-\ln(2x-1))}{(2x-1)^2},$$

luego *f* es creciente cuando

$$1-\ln(2x-1) > 0 \Leftrightarrow \ln(2x-1) < 1 \Leftrightarrow 0 < 2x-1 < e \Leftrightarrow \tfrac{1}{2} < x < \frac{e+1}{2}$$

f es decreciente cuando

$$1-\ln(2x-1) < 0 \Leftrightarrow \ln(2x-1) > 1 \Leftrightarrow 2x-1 > e \Leftrightarrow x > \frac{e+1}{2}$$

Luego *f* alcanza su único máximo local (y global) en el punto $x = \dfrac{e+1}{2}$.

.

c) Asíntotas verticales: único punto a intentar es $x = \frac{1}{2}$.

$$\lim_{x\to 1/2^+} f(x) = \lim_{x\to 1/2^+} \frac{\ln(2x-1)}{2x-1} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty,$$

luego la única asíntota vertical de *f* se halla en $x = \frac{1}{2}$.

Asíntotas horizontales y oblícuas: único punto a intentar es ∞.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(2x-1)}{2x-1} = \frac{\infty}{\infty} = (L'Hopital) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{2x-1}}{2} = 0,$$

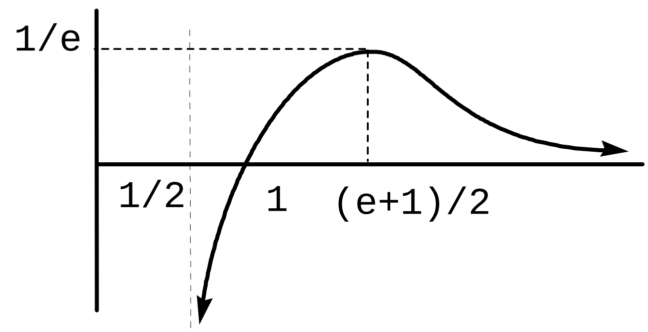
luego la única asíntota horizontal de *f* se halla en ∞, y no hay asíntotas oblicuas.

En cuanto a la imagen, como $\lim_{x\to 1/2^+} f(x) = -\infty$,

f es creciente en $(\frac{1}{2}, \frac{e+1}{2}]$, *f* es decreciente en $[\frac{e+1}{2},\infty)$,

$$f(\frac{e+1}{2}) = \frac{\ln(2(\frac{e+1}{2})-1)}{2(\frac{e+1}{2})-1} = \frac{1}{e} \text{ y } \lim_{x\to\infty} f(x) = 0, \text{ se deduce que } \mathrm{Im}(f) = (-\infty, \frac{1}{e}].$$

Por lo tanto, la gráfica de *f* es, aproximadamente, así:



1/e
1/2
1
(e+1)/2

3.

a) Enunciar el teorema de Weierstrass para funciones continuas.

b) Dada la función $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} a & si \quad x = -1 \\ x^3 & si \quad -1 < x < 1 \\ b & si \quad x = 1 \end{cases}$, estudiar, según los valores $a, b,$ si se cumplen las condiciones (hipótesis) del teorema de Weierstrass.

c) Para la función anterior estudiar, según los valores $a, b,$ si se cumplen las conclusiones (tesis) del teorema de Weierstrass.

1'5 puntos

---

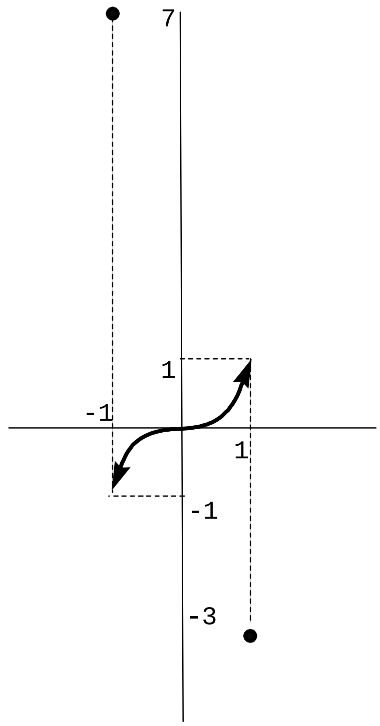
a) Una función continua definida en un intervalo cerrado y acotado alcanza máximo y mínimo.

.

b) La función f está definida en un intervalo cerrado y acotado.
Cumplirá las hipótesis del citado teorema si, además, la función es continua en dicho intervalo.
Ahora bien, f será continua en -1^+ cuando $a = -1$.
Análogamente, f será continua en 1^- cuando $b = 1$.
Luego f cumple las hipótesis del teorema cuando $a = -1, b = 1$.

.

c) Desde luego, se cumplen las conclusiones del teorema cuando la imagen sea un conjunto que posea máximo y mínimo.
Obviamente, $\mathrm{Im}(f) = \{a, b\} \cup (-1, 1),$ pues $\{x^3 : -1 < x < 1\} = (-1, 1)$.
Luego para que $\mathrm{Im}(f)$ sea un conjunto que posea máximo y mínimo,
será condición necesaria y suficiente que
$\min(a, b) \leq -1, \max(a, b) \geq 1$.
Esto sucede, por ejemplo, si $a = 7, b = -3$. Su gráfica sería, aproximadamente, así:



7
1
-1
1
-1
-3

4. **Sea** $C(x) = 8 + x + 0'01x^2$ **la función de costes de una empresa. Supongamos que dicha empresa produjo el mes pasado** 4 **unidades. Se pide:**

a) ¿Cuanto le costó a la empresa producir la última unidad? ¿Cuanto le hubiera costado a esa empresa haber producido una unidad adicional?

b) Relacionar dichos valores hallados en la parte a) con la derivada de $C(x)$ en $x = 4$, utilizando el hecho de que esta función es convexa.

1 punto

---

a) Coste de producir la última unidad = $C(4) - C(3) = 8 + 4 + 0'01.4^2 - (8 + 3 + 0'01.3^2) =$
$= 1 + 0'01.(4^2 - 3^2) = 1'07.$
Coste de producir una unidad adicional = $C(5) - C(4) = 8 + 5 + 0'01.5^2 - (8 + 4 + 0'01.4^2) =$
$= 1 + 0'01.(5^2 - 4^2) = 1'09.$

.

b) Como $C(x)$ es convexa, se cumple que, para cualquiera par de números x_1, x_2 que satisfagan $x_1 < 4 < x_2$, se deduce que
$C'(x_1) < C'(4) < C'(x_2)$. Luego, por el teorema del valor medio se cumple que:
i) $C(4) - C(3) = C'(x_1).(4 - 3) = C'(x_1)$, donde el punto x_1 está en el intervalo $(3,4)$.
ii) $C(5) - C(4) = C'(x_2).(5 - 4) = C'(x_2)$, donde el punto x_2 está en el intervalo $(4,5)$.
Por tanto, coste de producir la última unidad = $C'(x_1) < C'(4) < C'(x_2)$= coste de producir una unidad adicional.

5. **Sea la función** $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$ **, se pide:**

a) Estudiar la existencia de asíntotas verticales, horizontales y oblicuas de la función $f(x)$.

b) Probar que la imagen de $f(x)$ está contenida en el conjunto $(0,1) \cup (1,\infty)$.

Sugerencia para b): probar que $f(x) \neq 1$ es equivalente a que $1 + x \neq e^x$, para cualquier $x \neq 0$.

1 punto

---

a) Desde luego, f es continua en todos los puntos excepto en $x = 0$ y, por lo tanto, en esos puntos no habrá asíntota vertical.

Ahora bien, en dicho punto tampoco existe asíntota vertical, pues

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{e^x - 1} = \frac{0}{0} = (L'Hopital) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{e^x} = 1.$

Sigamos ahora por el comportamiento asintótico en ∞. Para ello,

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{e^x - 1} = \frac{\infty}{\infty} = (L'Hopital) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{e^x} = \frac{1}{\infty} = 0.$

Luego la función presenta asíntota horizontal $y = 0$ en ∞.

En cuanto al comportamiento asintótico en $-\infty$, empecemos por la existencia de asíntota oblicua:

$a = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x(e^x - 1)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{e^x - 1} = -1;$

$b = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - ax = \lim\limits_{x\to-\infty} (\dfrac{x}{e^x - 1} + x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x(1 + e^x - 1)}{e^x - 1} = \frac{0}{-1} = 0$

(pues $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{e^{-x}} = \frac{-\infty}{\infty} = (L'\text{Hopital}) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{-e^{-x}} = 0$).

Luego $y = -x$ es la asíntota oblicua en $-\infty$.

.

b) Consideremos $x \neq 0$, pues ese punto no pertenece al dominio.

El numerador de la función es positivo para los reales positivos y negativo en caso contrario.

En cuanto al denominador, sucede lo mismo, pues e^x es creciente y vale 1 cuando x=0.

Por lo tanto la función siempre tiene signo positivo o, en otras palabras, que $\mathrm{Im}(f) \subset (0,\infty)$.

Por otro lado, siguiendo la sugerencia, $1 + x \neq e^x$, para cualquier $x \neq 0$,

pues la función e^x es convexa y su tangente en el punto x=0 es la recta $y = 1 + x$, por lo que $1 + x < e^x$ si $x \neq 0$.

Por lo tanto, $\mathrm{Im}(f) \subset (0,1) \cup (1,\infty)$.

6. **Sea $C(x) = 48 + \sqrt{x^5}$ la función de costes de una empresa monopolista, donde x > 0 es el número de unidades producidas de cierta mercancía, y cuya función inversa de demanda (o precio por unidad) es $p(x) = \dfrac{45}{\sqrt{x}}$. Se pide:**

a) Probar que la función de beneficios es cóncava y, a partir de ahí, determinar la cantidad x que maximiza el beneficio.

b) Probar que la función de coste medio es convexa en $(0,\infty)$ y, a partir de ahí, determinar la cantidad x que minimiza el coste medio (o por unidad).

c) Supóngase ahora que, debido a determinadas restricciones legales, $a > 0$ representa la producción mínima de dicha empresa y $b > a$ representa la producción máxima de dicha empresa; es decir, $a \le x \le b$.

Discutir, según los valores de a y b, la producción que llevará a cabo esta empresa cuando se plantee: i) maximizar beneficios; ii) minimizar costes medios.

1'5 puntos

---

a) La función de beneficios es $B(x) = 45\sqrt{x} - (48 + x^{5/2})$. Por tanto,
$B'(x) = \frac{45}{2}x^{-1/2} - \frac{5}{2}x^{3/2}$ y $B''(x) = -\frac{45}{4}x^{-3/2} - \frac{15}{4}x^{1/2} < 0$, para todo $x > 0$,
luego $B(x)$ es estrictamente cóncava.
Por tanto, si existe un punto crítico (necesariamente único) será el maximizador global.
Ahora bien,
$B'(x) = \frac{45}{2}x^{-1/2} - \frac{5}{2}x^{3/2} = 0 \Leftrightarrow 9x^{-1/2} = x^{3/2} \Leftrightarrow 9 = x^2 \Leftrightarrow x = 3 > 0$
Luego la producción $x = 3$ maximiza el beneficio.
.

b) La función de coste medio es $\dfrac{C(x)}{x} = 48x^{-1} + x^{3/2}$, luego
$\left(\dfrac{C(x)}{x}\right)' = -48x^{-2} + \frac{3}{2}x^{1/2}$ y $\left(\dfrac{C(x)}{x}\right)'' = 96x^{-3} + \frac{3}{4}x^{-1/2} > 0$, para todo $x > 0$,
luego la función de coste medio es estrictamente convexa.
Por tanto, si existe un punto crítico (necesariamente único) será el minimizador global.
Ahora bien,
$\left(\dfrac{C(x)}{x}\right)' = -48x^{-2} + \frac{3}{2}x^{1/2} = 0 \Leftrightarrow 48x^{-2} = \frac{3}{2}x^{1/2} \Leftrightarrow 32x = x^{5/2} \Leftrightarrow x = 4 > 0.$
Luego la producción $x = 4$ minimiza el coste medio.
.

c) i) la empresa maximiza beneficios:
como la función es creciente en el intervalo $(0,3]$ y decreciente en el intervalo $[3,\infty)$,
se deduce que:
si $a \le 3 \le b \Rightarrow$ el beneficio máximo se alcanza en $x = 3$.
si $3 < a \Rightarrow$ el beneficio máximo se alcanza en $x = a$.
si $b < 3 \Rightarrow$ el beneficio máximo se alcanza en $x = b$.
ii) la empresa minimiza costes medios:
como la función es decreciente en el intervalo $(0,4]$ y creciente en el intervalo $[4,\infty)$,
se deduce que:
si $a \le 4 \le b \Rightarrow$ el coste medio mínimo se alcanza en $x = 4$.
si $4 < a \Rightarrow$ el coste medio mínimo se alcanza en $x = a$.
si $b < 4 \Rightarrow$ el coste medio mínimo se alcanza en $x = b$.

7. **Dada** $f(x) = (x-3)e^{-x}$, **se pide:**

a) Hallar $F_0(x)$ la primitiva de $f(x)$ que cumple $F_0(0) = 2$.

b) Obtener el polinomio de Taylor de $F_0(x)$ de orden 2, centrado en $a = 0$, y utilizarlo para calcular aproximadamente $F_0(-0'1)$.

Sugerencia: los apartados a) y b) son independientes.

1 punto

---

a) Integrando por partes, y llamando $u(x) = x-3, v'(x) = e^{-x}$,
se obtiene que cualquier primitiva se expresa así:
$\int (x-3)e^{-x}dx = (x-3)(-e^{-x}) - \int 1.(-e^{-x})dx = -(x-3)e^{-x} - e^{-x} + C = (2-x)e^{-x} + C$
Luego $F_0(0) = 2 + C = 2 \Rightarrow C = 0$.
Por lo tanto, $F_0(x) = (2-x)e^{-x}$
.
b) Sea $F(x)$ cualquier primitiva de $f(x)$. Entonces, como, $F'(x) = f(x)$ y
$F''(x) = f'(x) = e^{-x} + (x-3)(-e^{-x}) = (4-x)e^{-x}$, se deduce que:
$F_0(0) = 2, F_0'(0) = f(0) = -3, F_0''(0) = f'(0) = 4$.
Luego el polinomio de Taylor pedido será:
$P(x) = 2 - 3x + 2x^2$. Y, a partir de aquí, el valor aproximado de $F_0(-0'1)$ será:
$F_0(-0'1) \approx P(-0'1) = 2 + 0'3 + 0'02 = 2'32$

8. **Se considera** $F(x)$, **la primitiva de la función** $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2+1}$, **definida para** $x \geq 0$, **que satisface** $F(0) = 0$. **Se pide:**

a) Estudiar el crecimiento / decrecimiento, y la concavidad / convexidad de $F(x)$, así como la posible existencia de extremos (locales y globales) y de puntos de inflexión.

b) Probar que $\dfrac{x^2-4}{x^2+1} \geq \frac{1}{2}$, si $x \geq 3$, y deducir de ahí que, si $x \geq 3$, $F(x) \geq \frac{1}{2}x + K$, para algún K.

c) Representar la gráfica de $F(x)$, calculando previamente la asíntota de $F(x)$.

1'5 puntos

---

a) Calculemos, en primer lugar, el signo de la derivada de $F(x)$.

$F'(x) = f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2+1} < 0 \Leftrightarrow x\epsilon(0,2)$.

$F'(x) = f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2+1} > 0 \Leftrightarrow x\epsilon(2,\infty)$.

Luego $F(x)$ es decreciente en $(0,2)$, y creciente en $(2,\infty)$.

Por lo tanto, $F(x)$ tiene un mínimo local y global en $x = 2$.

Por otro lado, calculemos el signo de la derivada segunda de $F(x)$:

$$F''(x) = f'(x) = \frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2-4)}{(x^2+1)^2} = \frac{10x}{(x^2+1)^2} > 0$$

luego $F(x)$ siempre es convexa y, por tanto, no tiene puntos de inflexión.

.

b) Observación: la desigualdad se prueba de la siguiente forma: como $\dfrac{x^2-4}{x^2+1} \geq \frac{1}{2}$, si $x \geq 3$, pues es equivalente a $2x^2 - 8 \geq x^2 + 1$, lo que equivale a $x^2 \geq 9$, entonces tenemos que, si $x \geq 3$:

$F(x)=\int_0^x f(t)dt = \int_0^3 f(t)dt + \int_3^x f(t)dt \geq K' + \frac{1}{2}(x-3) = \frac{1}{2}x + K$,

llamando $K = K' - \frac{3}{2}$

.

c) Para calcular la asíntota de $F(x)$ en ∞, debemos hallar primero:

$A = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{F(x)}{x}$ y $B = \lim\limits_{x\to\infty} F(x) - Ax$. Por lo tanto, aplicando que $F(x) \geq \frac{1}{2}x + K$:

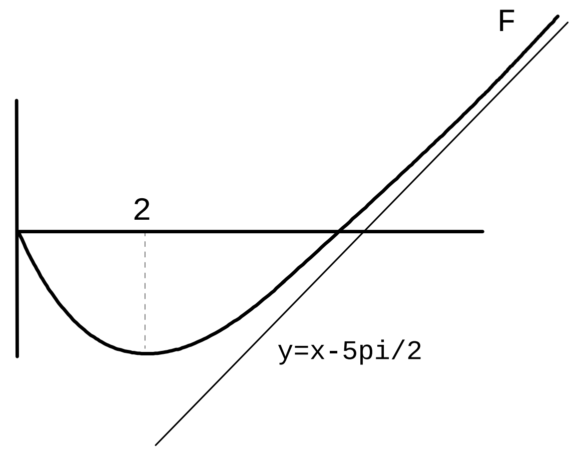
$A = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{F(x)}{x} = \frac{\infty}{\infty} =$ (L'Hopital)$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{1} = 1$. A continuación, calculemos B :

$B = \lim\limits_{x\to\infty} F(x) - Ax = \lim\limits_{x\to\infty} \int_0^x (f(t)-1)dt = \lim\limits_{x\to\infty} \int_0^x \left(\dfrac{t^2-4}{t^2+1} - \dfrac{t^2+1}{t^2+1}\right)dt =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \int_0^x \left(\dfrac{-5}{t^2+1}\right)dt = \lim\limits_{x\to\infty} [-5\arctan t]_0^x = \lim\limits_{x\to\infty} -5\arctan x = -\dfrac{5\pi}{2}$

Por tanto, la asíntota oblicua en ∞ es $y = x - \dfrac{5\pi}{2}$ y, como la función $F(x)$ es convexa en todo su dominio, dicha asíntota queda por debajo de la gráfica de $F(x)$.

Así pues, la gráfica de $F(x)$ es, más o menos, así:


F
2
y=x-5pi/2