Ejercicio	1	2	3	4	5	6	7	8	total
Puntos									

Universidad Carlos III de Madrid

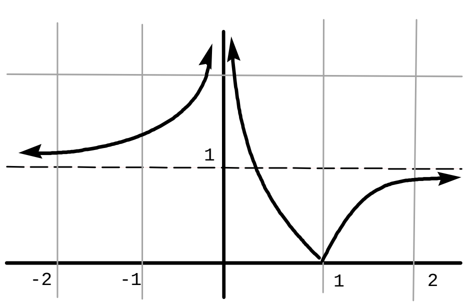
Departamento de Economía   Examen final de Matemáticas I   10 de septiembre de 2007

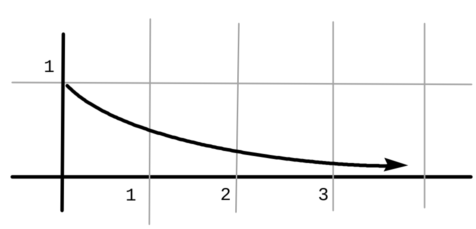
APELLIDOS:		**NOMBRE:**
DNI:	**Titulación:**	**Grupo:**

MODELO 1:

1. **Dada la función** $f(x) = |\frac{1}{x} - 1|$. **Se pide:**
a) Representar la gráfica de f y determinar su dominio e imagen.
b) Consideremos $f(x)$ restringida al intervalo donde es decreciente. Hallar su inversa y representarla.
Sugerencia para a) y b): no es necesario derivar.
1 punto

a) La gráfica de f se obtiene a partir de la gráfica de $\frac{1}{x}$ a partir de dos operaciones:
i) en primer lugar, considerar la función $g(x) = \frac{1}{x} - 1$, simple traslación una unidad hacia abajo la gráfica de $\frac{1}{x}$, con lo cual el único punto de corte de esta nueva gráfica con el eje horizontal sería el punto (1,0).
ii) en segundo lugar, en aquellos puntos donde $g(x)$ toma valores positivos o cero (el intervalo $(0,1]$), la función $f(x)$ coincide con $g(x)$, mientras que, en aquellos puntos donde $g(x)$ toma valores negativos, (los intervalos $(-\infty,0)$ y $(1,\infty)$), la función $f(x)$ coincide con $-g(x)$.
Por lo tanto, es claro que el dominio de f es $(-\infty,0) \cup (0,\infty)$, mientras que su imagen es $[0,\infty)$.
La gráfica de f tiene, aproximadamente, el siguiente aspecto (ver imagen abajo a la izquierda):
b) $f(x)$ es decreciente en el intervalo $(0,1]$, donde $g(x)$ es positiva.
Luego, en dicho intervalo, se cumple:
$f(x) = y = \frac{1}{x} - 1 \Rightarrow y + 1 = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{1+y}$
Por lo tanto, $f^{-1}(x) = \frac{1}{1+x}$.
En definitiva, como $f : (0,1] \to [0,\infty)$ es biyectiva, $f^{-1} : [0,\infty) \to (0,1]$ también lo es y, por tanto, su gráfica será aproximadamente así (ver imagen abajo a la derecha):





2. **Sea la función** $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-1}$**. Se pide:**

a) Hallar los intervalos de crecimiento / decrecimiento de *f*, así como sus extremos locales y/o globales.

b) Hallar los intervalos de concavidad / convexidad de *f*, así como sus puntos de inflexión.

c) Consideramos en $\mathbb{R}^2$ el orden de Pareto definido por $(x_0,y_0) \leq_P (x_1,y_1) \Leftrightarrow x_0 \leq x_1,\ y_0 \leq y_1$.
Hallar, si los hay, los puntos maximales y minimales, el máximo y el mínimo del conjunto
$A = \{(x,y) : f(x) \leq y \leq -x+2, x > -1\}$.

Sugerencia: antes de derivar, siempre es recomendable simplificar.

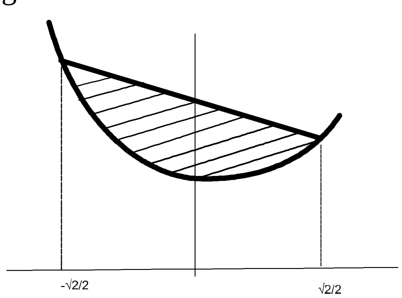
1'5 puntos

---

a) Antes de nada, simplificando la función, obtenemos que, si $x \neq 1$:
$f(x) = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2+2x+1-x}{(x+1)} = \frac{(x+1)^2-x}{(x+1)} = x+1-\frac{x+1-1}{(x+1)} = x+1-1+\frac{1}{(x+1)} = x+\frac{1}{(x+1)}$.
Por lo tanto, $f'(x) = 1-\frac{1}{(x+1)^2}$. Así pues, *f* es creciente $\Leftrightarrow f'(x) > 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 1-\frac{1}{(x+1)^2} > 0 \Leftrightarrow 1 > \frac{1}{(x+1)^2} \Leftrightarrow (x+1)^2 > 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-2) \cup (0,1) \cup (1,\infty)$.
f es decreciente$\Leftrightarrow f'(x) < 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 1-\frac{1}{(x+1)^2} < 0 \Leftrightarrow 1 < \frac{1}{(x+1)^2} \Leftrightarrow (x+1)^2 < 1, x \neq -1 \Leftrightarrow x \in (-2,-1) \cup (-1,0)$.
Por lo tanto, *f* alcanza un máximo local en $x = -2$ y un mínimo local en $x = 0$.
Obviamente, dichos puntos no son extremos globales, pues $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

b) Como $f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$, se deduce que
f es convexa$\Leftrightarrow f''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{(x+1)^3} > 0 \Leftrightarrow x+1 > 0 \Leftrightarrow x \in (-1,1) \cup (1,\infty)$.
f es cóncava$\Leftrightarrow f''(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{2}{(x+1)^3} < 0 \Leftrightarrow x+1 < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-1)$.
Observemos que, como $x = -1$ no pertenece al dominio de *f*, dicho punto
NO es un punto de inflexión.

c) La recta $y = -x+2$ corta a la gráfica de *f* cuando
$x+\frac{1}{(x+1)} = -x+2 \Leftrightarrow 2(x-1)+\frac{1}{x+1} = 0 \Leftrightarrow 2(x^2-1)+1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$
Por lo tanto, los puntos de corte de la recta y la función son: $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}+2), (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}+2)$.
Y, como $f(x)$ es convexa en el intervalo $(-1,1)$, $f(x)$ queda debajo de
la recta (decreciente) $y = -x+2$.
Por lo tanto, teniendo en cuenta que $f(x)$ es decreciente en $(-\frac{\sqrt{2}}{2},0)$ y creciente en $(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$,
el conjunto A tiene la forma siguiente:



Así pues, tenemos que:
Maximales (A)= $\{(x,y) : x \in [-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}], y = -x+2\} \Rightarrow$ no existe máximo.
Minimales (A)= $\{(x,y) : x \in [-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0], y = f(x)\} \Rightarrow$ no existe mínimo.

3. **Dada la función definida por** $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{ax} & si \quad x < 0 \\ 0 & si \;\; x = 0 \\ \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{bx} & si \;\; x > 0 \end{cases}$

a) Estudiar, según los valores de $a, b > 0$, la continuidad de f.

b) Calcular las asíntotas de f.

1 punto

---

a) El único punto donde *f* puede ser discontinua es el 0. Veamos cuales son los límites laterales en dicho punto, por el método de racionalización:

i) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{ax} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{ax(\sqrt{1+x^2}+1)} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1+x^2-1}{ax(\sqrt{1+x^2}+1)} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x}{a(\sqrt{1+x^2}+1)} = 0$

ii) Por el mismo motivo, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$.

Luego *f* es continua en 0 para cualesquiera valores de a y b.

b) Análogamente, por el método de racionalización, obtenemos que

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{b(\sqrt{1+x^2}+1)} = \frac{1}{b}.\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+\frac{1}{x}} = \frac{1}{b}$,

luego la recta $y = \frac{1}{b}$ es la asíntota horizontal de $f(x)$ en ∞.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{a(\sqrt{1+x^2}+1)} = \frac{1}{a}.\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-|x|}{\sqrt{1+x^2}+1} = (\frac{-1}{a}).\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+\frac{1}{|x|}} = \frac{-1}{a}$,

luego la recta $y = \frac{-1}{a}$ es la asíntota horizontal de $f(x)$ en $-\infty$.

4. **Sea** $y = f(x)$ **la función definida de manera implícita mediante la ecuación** $\ln(x-y) + 2x = 4y$ **en un entorno del punto** $(2,1)$**. Se pide:**

a) Hallar, mediante $f'(2)$, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(2,1)$.

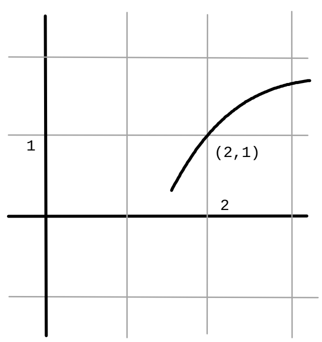
b) Hallar, mediante $f''(2)$, el polinomio de Taylor de orden 2 de f centrado en el punto $a = 2$.

c) Dibujar aproximadamente la gráfica de f en un entorno del punto $(2,1)$, con la información obtenida en los apartados anteriores.

1,5 puntos

---

a) Derivando la ecuación, obtenemos que $\frac{1-y'}{x-y} + 2 = 4y'$
luego, sustituyendo (x,y) por $(2,1)$, obtenemos que:
$1 - y' + 2 = 4y' \Rightarrow y'(2) = \frac{3}{5}$.
Así pues, la ecuación de la recta tangente es: $y - 1 = \frac{3}{5}(x-2)$.
.
b) Derivando la ecuación $1 - y' + 2(x-y) = 4y'(x-y)$, obtenemos que:
$-y'' + 2(1-y') = 4y''(x-y) + 4y'(1-y')$
y ahora, sustituyendo (x,y) por $(2,1)$, $y'(2)$ por $\frac{3}{5}$, obtenemos que:
$-y'' + \frac{4}{5} = 4y'' + \frac{24}{25} \Rightarrow 5y''(2) = \frac{20}{25} - \frac{24}{25} = -\frac{4}{25} \Rightarrow y''(2) = -\frac{4}{125}$
Por lo tanto, el polinomio de Taylor de orden 2, centrado en $a = 2$, de f es:
$P(x) = 1 + \frac{3}{5}(x-2) - \frac{2}{125}(x-2)^2$
.
c) Por lo obtenido anteriormente la función, cerca del punto $(x,y) = (2,1)$, es creciente y cóncava, luego su imagen será, aproximadamente, así:



5.

a) Enunciar el teorema de Weierstrass.

b) Hallar los valores de c, con $0 \leq c \leq 1$, para los que la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{(x-c)^2}{\sqrt[3]{x-c}}$ cumple la tesis (esto es, la conclusión) de dicho teorema.

1 punto

---

a)

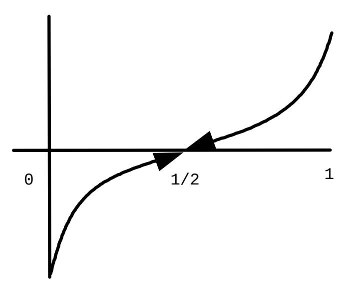
b) Evidentemente, la función no cumple nunca la hipótesis del teorema, pues f no es contínua en el punto $x = c$, ya que no está definida ahí. Ahora bien:

i) si $0 < c < 1 \Rightarrow f(x) = \sqrt[3]{(x-c)^5}$, si $x \neq c$; $f(c)$ no existe. Luego como $f(x)$ es creciente en el intervalo $[0,1]$, exceptuando el punto donde la función no está definida, $f(x)$ alcanzará su mínimo en el punto $x = 0$ y su máximo en el punto $x = 1$.

ii) si $c = 0 \Rightarrow f(x)$ toma valores arbitrariamente próximos a 0, cuando x se aproxima a 0, pero $f(x)$ no toma el valor 0, pues $f(x) > 0$ siempre. Luego resulta que f no alcanza su mínimo, que debería ser 0, de estar definida la función en el punto $x = c$.

iii) si $c = 1 \Rightarrow f(x)$ toma valores arbitrariamente próximos a 0, cuando x se aproxima a 1, pero $f(x)$ no toma el valor 0, pues $f(x) < 0$ siempre. Luego resulta que f no alcanza su máximo, que debería ser 0, de estar definida la función en el punto $x = c$.

Conclusión: f cumple la tesis del teorema cuando $0 < c < 1$.

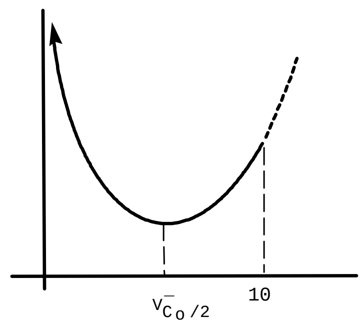


6. **Sea** $C(x) = 100 + 30x + 4x^2$ **la función de costes de una empresa monopolista, donde x** $\geqslant 0$ **es el número de unidades producidas de cierta mercancía, y cuya función inversa de demanda (o precio por unidad) es** $p(x) = 100 - ax$**, donde** $0 < a < 20$ **es un parámetro real que determina la demanda máxima. Se pide:**

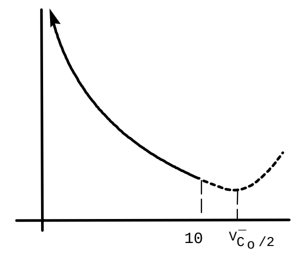
a) Determinar la cantidad x que minimiza el coste medio (o por unidad).
b) Discutir, según los valores de a, la cantidad x que maximiza la función de beneficio.
c) Supongamos ahora que $a = 10$ y que $C(x) = C_0 + 30x + 4x^2$ es la nueva función de costes.
¿Cual será ahora, dependiendo de C_0, la cantidad x que minimiza el coste medio (o por unidad)?
Sugerencia para b) y c): téngase en cuenta el dominio de las funciones respectivas.
1'5 puntos

---

a) Como la función de coste medio, $\frac{C(x)}{x} = \frac{100}{x} + 30 + 4x$, es convexa (lo cual se puede comprobar observando que $(\frac{C(x)}{x})'' > 0)$, el mínimo global se encuentra en su punto crítico, es decir, en el punto que anula su derivada. Es decir:
$(\frac{C(x)}{x})' = \frac{-100}{x^2} + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 25 \Longleftrightarrow x = 5$, única solución que tiene sentido, pues $p(5) > 0$.
Luego $x = 5$ minimiza el coste medio.
b) $B(x) = (100 - ax)x - (100 + 30x + 4x^2)$ es una función cóncava (pues $B''(x) = -2a - 8$), luego si el punto crítico está en el intervalo donde la función tiene sentido económico (esto es, el intervalo $[0, \frac{100}{a}]$, que es el que hace que el precio sea positivo o cero).
Por lo tanto, veamos donde está el punto crítico:
$B'(x) = 70 - 2(a+4)x = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{35}{a+4} \in [0, \frac{100}{a}]$
Luego la función de beneficios alcanza siempre el máximo en el punto $x = \frac{35}{a+4}$
c) Análogamente a la parte a), como la función de coste medio es, ahora,
$\frac{C(x)}{x} = \frac{C_0}{x} + 30 + 4x$
hallamos el punto crítico, que resulta ser:
$(\frac{C(x)}{x})' = \frac{-C_0}{x^2} + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{C_0}{4} \Longleftrightarrow x = \frac{\sqrt{C_0}}{2}$,
única solución que podría tener sentido económico, pues la otra sería negativa.
Ahora bien, además de ser x un valor positivo, hace falta, además, que el precio también lo sea.
Por tanto, como $a = 10$, obtenemos dos casos:
i) si $\frac{\sqrt{C_0}}{2} \leq 10 \Longleftrightarrow C_0 \leq 400$, entonces el minimizador del coste medio es $x = \frac{\sqrt{C_0}}{2}$.
ii) si $\frac{\sqrt{C_0}}{2} > 10 \Longleftrightarrow C_0 > 400$, entonces el minimizador del coste medio no puede ser $x = \frac{\sqrt{C_0}}{2}$, pues dicho punto se sale del intervalo $[0, \frac{100}{a}] = [0, 10]$. En este caso hay que tener en cuenta que la función es decreciente en el intervalo $(0, 10]$,
luego el mínimo de la función de costes medios se obtiene en el punto $x = 10$.
(ver imágenes en la página siguiente)



V̄Co/2
10



10
V̄Co/2

7. **Dadа** $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$, **se pide:**

a) Calcular aproximadamente, mediante la ecuación de la recta tangente a dicha función en el punto de abscisa $x_0 = 8$, el valor de $\sqrt[3]{(7'9)^4}$.

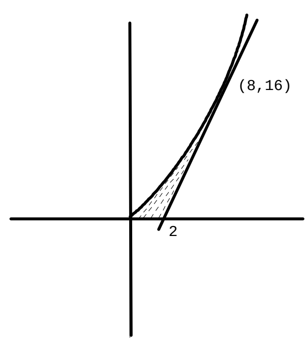
b) Hallar el área del recinto que limitan la gráfica de $f(x)$, la recta tangente calculada en la parte a) y el eje horizontal (o de abscisas).

Sugerencia para b): dibujar primero el recinto. Además, el valor del área puede dejarse indicado.

1 punto

---

a) Como $f(x) = x^{\frac{4}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$, luego $f'(8) = \frac{8}{3}$.
Por lo tanto, llamando $y = g(x)$ la función recta tangente a f en el punto $(8,16)$,
la ecuación de dicha recta es: $y = g(x) = 16 + \frac{8}{3}(x-8)$.
Luego, aproximando mediante la recta tangente a f en $x = 8$, obtenemos que:
$\sqrt[3]{(7'9)^4} = f(7'9) \approx g(7'9) = 16 + \frac{8}{3}(-0'1) = \frac{47'2}{3}$.
.
b) Como la función $f(x)$ es convexa, la recta $g(x)$, tangente a la gráfica de f en el punto $(8,16)$, queda por debajo de $f(x)$.
Hallemos, en primer lugar, el punto de corte de $g(x)$ con el eje horizontal:
$16 + \frac{8}{3}(x-8) = 0 \Leftrightarrow 2 = \frac{1}{3}(8-x) \Leftrightarrow 6 + x = 8 \Leftrightarrow x = 2$
Luego el recinto, limitado superiormente por la función $f(x)$ e inferiormente por el eje horizontal (desde $x = 0$ hasta $x = 2$) y la recta tangente (desde $x = 2$ hasta $x = 8$) es, aproximadamente, así:



Por lo tanto, el área del recinto será:

$$\int_0^2 (f(x) - 0)dx + \int_2^8 (f(x) - g(x))dx = \int_0^2 x^{\frac{4}{3}}dx + \int_2^8 (x^{\frac{4}{3}} - (16 + \tfrac{8}{3}(x-8)))dx =$$

$$= [\tfrac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}]_0^2 + [\tfrac{3}{7}x^{\frac{7}{3}} - \tfrac{4}{3}x^2 + \tfrac{64-48}{3}x]_2^8 =$$

$$= \tfrac{3}{7}2^{\frac{7}{3}} + \tfrac{3}{7}8^{\frac{7}{3}} - \tfrac{4}{3}8^2 + \tfrac{16}{3}8 - (\tfrac{3}{7}2^{\frac{7}{3}} - \tfrac{4}{3}2^2 + \tfrac{16}{3}2) =$$

$$= \tfrac{3}{7}2^7 - \tfrac{4}{3}8^2 + \tfrac{2}{3}8^2 - \tfrac{16}{3} = \tfrac{1}{21}(9.2^7 - 7.2^7) - \tfrac{7.2^4}{21} =$$

$$= \tfrac{1}{21}(16.2^4 - 7.2^4) = \tfrac{9}{21}.2^4 = \tfrac{48}{7}$$

8. **Dadas las funciones** $F(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{t^4 + 14}$ **,se pide**:

a) Probar que $F(x)$ es una función impar.

b) Determinar los intervalos de crecimiento / decrecimiento de F, así como sus extremos locales y globales.

c) Calcula las asíntotas de F en $\pm\infty$ y representar aproximadamente la gráfica de F.

Sugerencia para a), b) y c): no se debe intentar calcular una primitiva de $f(x) = \frac{1}{x^4+14}$.

Sugerencia para c): comprueba que, si $x > 0 \Rightarrow F(x) < \int_x^{2x} \frac{dt}{t^4}$

1'5 puntos

---

a) Sea $x > 0.$ Entonces, utilizando que el cambio de orden de los integrandos cambia el signo de la integral, obtenemos que

$F(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{dt}{t^4 + 14} = -\int_{-2x}^{-x} \frac{dt}{t^4 + 14} =$

y ahora, utilizando que $f(t)$ es una función par,

$= -\int_x^{2x} \frac{dt}{t^4 + 14} = -F(x).$

Lo anterior, junto al hecho de que $F(0) = 0,$ demuestra que F es una función impar.

.

b) Como $F'(x) = \frac{1}{(2x)^4+14}.2 - \frac{1}{x^4+14} = \frac{2(x^4+14)-(16x^4+14)}{(16x^4+14)(x^4+14)} = \frac{-14x^4+14}{(16x^4+14)(x^4+14)},$ se deduce que:

i) $F'(x) > 0 \Leftrightarrow -14x^4 + 14 > 0 \Leftrightarrow x^4 < 1 \Leftrightarrow x \in (-1,1),$ luego F es creciente en $[-1,1]$.

ii) $F'(x) < 0 \Leftrightarrow -14x^4 + 14 < 0 \Leftrightarrow x^4 > 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-1] \cup [1,\infty),$

luego F es decreciente en $(-\infty,-1]$ y en $[1,\infty)$.

Por lo tanto, F alcanza un mínimo local en $x = -1$ y un máximo local en $x = 1$.

Además, como $F(-1) < 0,$ F es decreciente en $(-\infty,-1],$ creciente en $[-1,0]$ y

$F(x)$ siempre es positiva si $x > 0,$ F alcanza un mínimo global en $x = -1$.

Por las mismas razones, F alcanza un máximo global en $x = 1$.

.

c) Como sucede que $\frac{1}{t^4 + 14} < \frac{1}{t^4} \Rightarrow \int_x^{2x} \frac{dt}{t^4 + 14} < \int_x^{2x} \frac{dt}{t^4},$ cuando $x > 0$.

Y, calculando la última integral:

$\int_x^{2x} t^{-4}dt = [\frac{t^{-3}}{-3}]_x^{2x} = (\frac{-1}{3})(\frac{1}{8x^3} - \frac{1}{x^3})$

Luego, si $x > 0,$ como $0 < F(x) < (\frac{-1}{3})(\frac{1}{8x^3} - \frac{1}{x^3}) \to 0$ cuando $x \to \infty$,

se deduce que $y = 0$ es la asíntota horizontal de F en ∞.

Y, como F es una función impar,

obviamente $y = 0$ también es la asíntota horizontal de F en $-\infty$.

Por lo tanto, la función F tiene una gráfica, aproximadamente, así: