Ejercicio	1	2	3	4	5	6	7	8	total
Puntos									

Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía   Examen final de Matemáticas I   9 de septiembre de 2006

APELLIDOS:		**NOMBRE:**
DNI:	**Titulación:**	**Grupo:**

MODELO 1:

1. **Sea** $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x+1| \leq y;\ x^2+y^2 \leq 25\}$. **Se pide:**

a) Representar el conjunto A, precisando los puntos de corte de las diferentes rectas y curvas.
Sugerencia: representar la función $y = |x+1|$.

b) Consideramos en $\mathbb{R}^2$ el orden de Pareto definido por $(x_0,y_0) \leq_P (x_1,y_1) \Leftrightarrow x_0 \leq x_1,\ y_0 \leq y_1$.
Hallar el conjunto de puntos maximales y minimales, máximo y mínimo de A, si los hay.

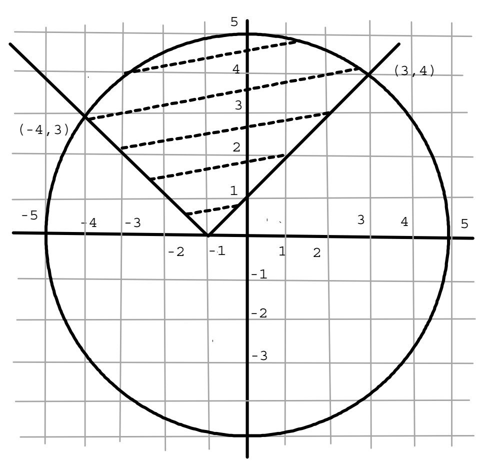
1 punto

a) La inecuación $|x+1| \leq y$ se puede interpretar de la siguiente forma:
$-x-1 \leq y$, si $x \leq -1$; $x+1 \leq y$, si $-1 \leq x$.

Y ahora, hallando los puntos de corte de las rectas $y = -x-1, y = x+1$ con la circunferencia $x^2+y^2 = 25$ en el semiplano $y > 0$, que resultan ser los puntos $(-4,3), (3,4)$, obtenemos lo siguiente:

el conjunto A está limitado por las rectas $y = -x-1, y = x+1$ y el arco de circunferencia de la circunferencia $x^2+y^2 = 25$ que se expande entre los puntos $(-4,3)$ y $(3,4)$.

Su representación es, aproximadamente, la siguiente:



b) Minimales$(A) = \{(x,y) : y = -x-1, -4 \leq x \leq -1\}$, luego no hay mínimo de A.
Maximales$(A) = \{(x,y) : x^2+y^2 = 25, 0 \leq x \leq 3\}$, luego no hay máximo de A.

2. **Dada la función** $f(x) = \ln(\frac{x-1}{x-2})$. **Se pide:**

a) Determinar el dominio y la imagen de f. Sugerencia para la imagen: calcular las asíntotas de f.

b) Calcular la función inversa $f^{-1}(x)$.

1 punto

---

a) Dominio (f)=$\{x : 0 < \frac{x-1}{x-2}\} = \{x : 0 < x-1, 0 < x-2\} \cup \{x : x-1 < 0, x-2 < 0\} =$
$= (2,\infty) \cup (-\infty, 1)$.

Imagen $(f) = \mathrm{Im}(-\infty, 1) \cup \mathrm{Im}(2,\infty)$; ahora bien, como
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ln 1 = 0, \lim_{x\to 1^-} f(x) = \ln 0^+ = -\infty$, se deduce que $(-\infty, 0) \subset \mathrm{Im}(-\infty, 1)$
pues f es continua en $(-\infty, 1)$. Análogamente, como
$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \ln\infty = \infty, \lim_{x\to\infty} f(x) = \ln 1 = 0$, se deduce que $(0,\infty) \subset \mathrm{Im}(2,\infty)$
pues f es continua en $(2,\infty)$.

Y, como $0 \notin \mathrm{Im}(f)$, pues $f(x) = \ln(\frac{x-1}{x-2}) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x-2} = 1$, lo que es imposible
se deduce que $\mathrm{Im}(f) = (-\infty, 0) \cup (0,\infty)$.

b) Llamemos $f^{-1}(x) = y$; entonces debe cumplirse que
$f(y) = \ln(\frac{y-1}{y-2}) = x \Leftrightarrow \frac{y-1}{y-2} = e^x \Leftrightarrow y-1 = (y-2)e^x \Leftrightarrow y(1-e^x) = 1-2e^x$
en otras palabras:
$f^{-1}(x) = y = \frac{1-2e^x}{1-e^x} = \frac{2e^x-1}{e^x-1}$

3. **Dada la función definida por** $f(x) = \begin{cases} \ln(x^2+a) & si\ x < -1 \\ \ln(x^2-2x+1) & si\ \ -1 \le x \le 0 \\ x+b & x > 0 \end{cases}$

a) Hallar los valores a y b para que la función f sea continua en todo valor real.

b) Estudiar si, para los valores a y b hallados en el apartado anterior, la función f es derivable en cualquier valor real.

1 punto

---

a) Desde luego, f es continua en $(-1,0)$ y en $(0,\infty)$ para todo valor de a y de b.

Por otra parte, f es continua en $(-\infty,-1)$ cuando $a > -1$.

Estudiemos a continuación lo que sucede en los puntos -1 y 0.

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \ln(1+a)$, $f(-1) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \ln 4$; luego f es continua en -1 si y solo si $a = 3$

$\lim\limits_{x\to -0^+} f(x) = b$, $f(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \ln 1 = 0$; luego f es continua en 0 si y solo si $b = 0$.

b) Obviamente, f es derivable en cualquier valor distinto de -1 y 0, cuando a=3 y b=0.

Veamos que sucede en los puntos conflictivos.

$D_-f(-1) = \lim\limits_{x\to -1^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} \frac{2x}{x^2+3} = \frac{-2}{1+3} = \frac{-1}{2}$ (la primera igualdad se cumple porque f es continua en -1 y el límite existe).

$D_+f(-1) = \frac{2x-2}{x^2-2x+1}(en\ x = -1) = \frac{-4}{4} = -1$. Por tanto, f no es derivable en $x = -1$.

$D_-f(0) = \frac{2x-2}{x^2-2x+1}(en\ x = 0) = -2$

$D_+f(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = 1$ (la primera igualdad se cumple porque f es continua en 0 y el límite existe). Por tanto, f no es derivable en $x = 0$.

4. **Sea** $y = f(x)$ **la función definida de forma implícita mediante la ecuación** $3x + y^4 = (2x+1)y$**, en un entorno del punto** $(0,1)$**.**

a) Calcular, mediante $f'(0)$, la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(0,1)$.

b) Deducir, mediante $f''(0)$, la convexidad o la concavidad de f en un entorno del punto $(0,1)$.

c) Dibujar aproximadamente la gráfica de f en un entorno del punto $(0,1)$. ¿Alcanza un máximo la función f en el punto 0?

Sugerencia para c): es suficiente suponer que $f'(0) < 0$, $f''(0) < 0$.

1,5 puntos

---

a) Derivando la ecuación, obtenemos que

$3 + 4y^3y' = 2y + (2x+1)y'$, luego sustituyendo (x,y) por $(0,1)$, se deduce que

$3 + 4y' = 2 + y' \Leftrightarrow 3y' = -1 \Leftrightarrow y' = \frac{-1}{3}$.

Así pues, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en un entorno del punto $(0,1)$ es:

$y - 1 = (\frac{-1}{3})(x-0) \Leftrightarrow y = (\frac{-1}{3})x + 1$.

.

b) Derivando la primera ecuación del apartado a), se obtiene que:

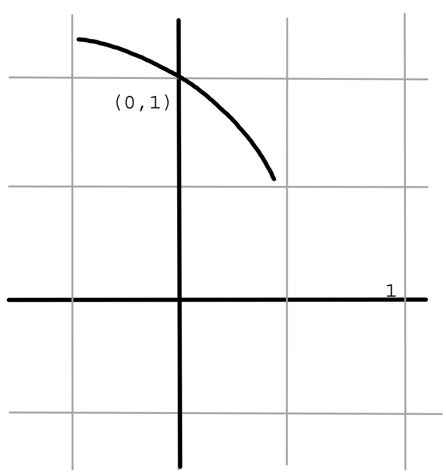
$12y^2(y')^2 + 4y^3y'' = 2y' + 2y' + (2x+1)y''$, luego sustituyendo (x,y) por $(0,1)$, y' por $\frac{-1}{3}$, se deduce que:

$12(\frac{1}{9}) + 4y'' = \frac{-4}{3} + y'' \Leftrightarrow 3y'' = \frac{-8}{3} \Leftrightarrow y'' = \frac{-8}{9}$, luego f es cóncava en un entorno del punto $(0,1)$.

.

c) Obviamente, f no alcanzará un máximo en el punto 0, pues f es decreciente cerca de ese punto.

Por último, la gráfica de una función f que pasa por el punto $(0,1)$, es decreciente y cóncava cerca de $x = 0$ será, aproximadamente, así:



5.

a) Enunciar el teorema de Weierstrass.

b) Considérese $b > 1$ y la función $f:\ [1,b] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & ,\ \text{si } x \leq 2 \\ \dfrac{x^2}{4} & ,\ \text{si } 2 < x \end{cases}$. Discutir para que valores de b esta función satisface las hipótesis del teorema.

c) Considerando $b > 1$, discutir para que valores de b esta función satisface la conclusión a pesar de no satisfacer las hipótesis del teorema.

1,5 puntos

---

a) Una función real continua f en un intervalo cerrado y acotado alcanza máximo y mínimo global.

b) La función f, considerando que estuviera definida en $[1,\infty)$, sería continua en todos los puntos excepto en 2 por la derecha.

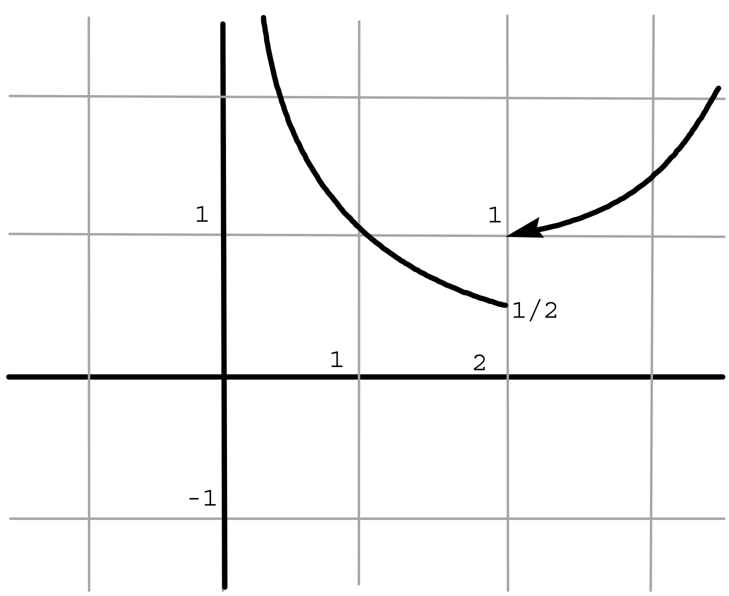
Por lo tanto, la función $f:\ [1,b] \to \mathbb{R}$ satisface las hipótesis del teorema de Weierstrass cuando $b \leq 2$.

c) Por el apartado anterior, para que f no cumpla las hipótesis del teorema de Weierstrass, hace falta que $b > 2$.

Como $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = f(2) = \frac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 1$, f es decreciente en $[1,2]$ y creciente en $(2,\infty)$, es claro que f alcanza su mínimo en $x = 2$.

Por otra parte, f alcanza su máximo en $x = b$ cuando $b > 2$, pues $f(b) > f(1) = 1$, f es decreciente en $[1,2]$ y creciente en $(2,b)$.

Conclusión, la función f satisface las conclusiones del teorema de Weierstrass siempre, aunque no satisfaga las hipótesis.



6. **Una empresa produce x unidades de cierto bien con un coste de $C(x) = 400 + 20x + \sqrt{10}\,x^{3/2}$ unidades monetarias. Se pide:**

a) Hallar la función de coste marginal y estudiar sus intervalos de crecimiento/decrecimiento.

b) Hallar la función de coste medio y estudiar sus intervalos de crecimiento/decrecimiento.

c) Hallar la producción x_0 que minimiza el coste medio y comparar, para dicho valor x_0, el coste marginal y el coste medio.

1'5 puntos

---

a) Coste marginal (x)=$C'(x) = 20 + \frac{3}{2}\sqrt{10}\,x^{1/2}$.

Obviamente, esta función es creciente para todos los valores positivos.

b) Coste medio (x)=$\dfrac{C(x)}{x} = \dfrac{400}{x} + 20 + \sqrt{10}\,x^{1/2}$. Y, como

$\left(\dfrac{C(x)}{x}\right)' = \dfrac{-400}{x^2} + \frac{1}{2}\sqrt{10}\,x^{-1/2} < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{10}\,x^{-1/2} < \dfrac{400}{x^2} \Leftrightarrow \sqrt{10}\,x^{3/2} < 800 = 2^3.10^2 \Leftrightarrow$

(elevando al cuadrado ambos términos de la expresión)

$10x^3 < 2^6.10^4 \Leftrightarrow x^3 < 2^6.10^3 \Leftrightarrow x < 40$

obtenemos que la función es decreciente si $x < 40$.

Análogamente, la función de costes medios es creciente si $x > 40$.

c) Por el apartado anterior, si la función es decreciente para los valores $x < 40$, y creciente para los valores $x > 40$, el único punto que minimiza el coste medio es $x_0 = 40$.

Para dicho valor, es conocido que el coste medio y el coste marginal coinciden.

Comprobación:

$C'(40) = 20 + \frac{3}{2}\sqrt{10}\,.40^{1/2} = 50;\ \dfrac{C(40)}{40} = 10 + 20 + \sqrt{10}\,.40^{1/2} = 50$

7. **Dada** $f(x) = x^2(2\ln x - 1)$, **se pide:**

a) Estudiar el dominio, el crecimiento / decrecimiento y los extremos locales y globales de *f*.

b) Estudiar los intervalos de concavidad / convexidad de f, así como hallar los puntos de inflexión.

c) Hallar los puntos de corte con los ejes, las asíntotas (si existen) y representar la función.

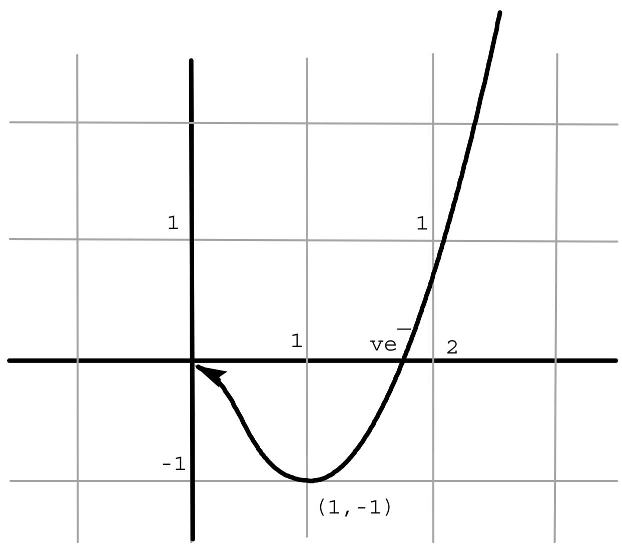
1'5 puntos

---

a) Dominio $(f) = (0, \infty)$, obviamente.
Y, como $f'(x) = 2x(2\ln x - 1) + x^2(\frac{2}{x}) = 4x\ln x$, entonces
f es creciente en $(1, \infty)$, decreciente en $(0, 1)$, *f* alcanza su mínimo global en $x = 1$.
b) $f''(x) = 4\ln x + 4 = 4(\ln x + 1)$.
Luego, como $\ln x$ es creciente y $\ln x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$, se deduce que
f es convexa en $(\frac{1}{e}, \infty)$, *f* es cóncava en $(0, \frac{1}{e})$, *f* alcanza su único punto de inflexión en $x = \frac{1}{e}$.
c) El único punto de corte con los ejes, sabiendo que el dominio son los reales positivos, es
$2\ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}}$.
Las únicas asíntotas posibles son en 0^+ y en ∞. Ahora bien:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\ln x - 1}{x^{-2}} = \frac{-\infty}{\infty} = (L'Hopital) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2/x}{(-2)x^{-3}} = \lim_{x\to 0^+} -x^2 = 0,$$

luego no existe ninguna asíntota vertical.
Y ahora, calculando $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$, como $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} x(2\ln x - 1) = \infty$
deducimos que *f* no tiene ninguna asíntota oblícua ni horizontal.
La gráfica de la función sería, aproximadamente, así:



8. **Dada la función** $F(x) = \int_0^x \frac{t-1}{2t^2+6}\,dt$, **donde x > 0. Se pide**:

a) Estudiar el crecimiento / decrecimiento y los extremos locales y globales de F, utilizando la derivada de $F(x)$.

b) Hallar el valor exacto de $F(1)$, utilizando la primitiva de $f(t) = \frac{t-1}{2t^2+6}$.

1 punto

a) Como $F'(x) = \frac{x-1}{2x^2+6}$, es claro que F es creciente en $(1,\infty)$ y decreciente en $(0,1)$.
Como consecuencia de lo anterior, F alcanza su extremo local y global en el punto $x = 1$.

.

b) Como $\int \frac{t-1}{2t^2+6}dt = \frac{1}{4}\int \frac{4t}{2t^2+6}dt - \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+3}dt =$

$= \frac{1}{4}\int \frac{4t}{2t^2+6}dt - \frac{1}{2\sqrt{3}}\int \frac{1/\sqrt{3}}{(\frac{t}{\sqrt{3}})^2+1}dt =$

$= \frac{1}{4}\ln(2t^2+6) - \frac{\sqrt{3}}{6}arctg(\frac{t}{\sqrt{3}})$, se deduce que

$F(1) = \int_0^1 \frac{t-1}{2t^2+6}dt = [\frac{1}{4}\ln(2+6) - \frac{\sqrt{3}}{6}arctg(\frac{1}{\sqrt{3}})] - [\frac{1}{4}\ln(2.0+6) - \frac{\sqrt{3}}{6}arctg(\frac{0}{\sqrt{3}})] =$

$= \frac{1}{4}\ln\frac{4}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6}arctg(\frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{1}{4}\ln\frac{4}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6}.\frac{\pi}{6}$