Ejercicio	1	2	3	4	5	6	7	8	total
Puntos									

Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía   Examen final de Matemáticas I   9 de septiembre de 2005

APELLIDOS:		**NOMBRE:**
DNI:	**Titulación:**	**Grupo:**

MODELO 1:

1. **Considera la función** $f(x) = \ln(|x|-1)+1$. **Se pide:**

a) Determinar el dominio y la imagen de f.

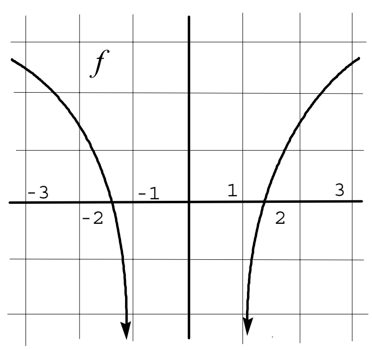
b) Representar la gráfica de f. Sugerencia: estudiar las simetrías de f y recordar que $\ln e = 1$, donde $e = 2'7\ldots$

1 punto

a) Dominio(f) = $(-\infty,-1)\bigcup(1,\infty)$ pues $|x|-1$ ha de ser mayor que 0 (o, equivalentemente, $|x|>1$) para que exista $f(x)$..

Por otra parte, como $f(x)$ es una función par, imagen$(f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}))$ = imagen$(f:(1,\infty)\to\mathbb{R})$; y, como en el intervalo $(1,\infty)$ $f(x) = \ln(x-1)+1$ es una función creciente , y $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$, se deduce que imagen$(f:\mathbb{R}\to\mathbb{R})$ $=(-\infty,\infty)$.

b) Como $f(x)$ es una función par, del apartado anterior se deduce que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$. Además, como $f(x)$ es creciente en el intervalo $(1,\infty)$, $f(x)$ será decreciente en el intervalo $(-\infty,-1)$. Por último, como $f(x)$ es una función continua en los puntos de su dominio, la gráfica de esta función será, aproximadamente, así:



2. **Dada la función** $f(x) = x^2 e^{-x}$ **, se pide:**

a) Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y/o mínimos de la función $f(x)$.

b) Calcular los intervalos de concavidad y convexidad, así como los puntos de inflexión, de $f(x)$.

c) Calcular las asíntotas y representar la gráfica de $f(x)$.

1,5 puntos

---

a) En primer lugar, f es continua en toda la recta real. Si calculamos la derivada de f, obtenemos: $f'(x) = 2xe^{-x} + x^2e^{-x}(-1)] = e^{-x}(2x - x^2) = e^{-x}(2-x)x.$ Luego se deduce que:

f creciente en $(0,2),$ puesto que $f'(x) > 0.$

f decreciente en $(-\infty,0)$ y en $(2,\infty),$ puesto que $f'(x) < 0.$

f alcanza un mínimo local y global en el punto x = 0, pues $f(x) > 0,$ si x es distinto de 0, $f(0) = 0.$

f alcanza un máximo local en el punto x = 2, pero no global, pues $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty,$ como se verá a continuación.

b) Para ello, calculamos la derivada segunda de f.

$f''(x) = e^{-x}(-1)(2x - x^2) + e^{-x}(2 - 2x) = e^{-x}[-2x + x^2 + 2 - 2x] = e^{-x}[x^2 - 4x + 2].$ Por lo tanto, se deduce que

f convexa en $(-\infty, 2 - \sqrt{2})$ y en $(2 + \sqrt{2}, \infty)$ puesto que $f''(x) > 0.$

f cóncava en $(2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}),$ puesto que $f''(x) < 0.$

f alcanza dos puntos de inflexión en $2 - \sqrt{2}$ y en $2 + \sqrt{2}$.

c) Como f es continua, no tiene asíntotas verticales. Veamos si tiene asíntotas horizontales:

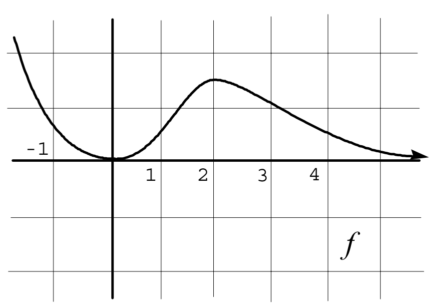
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^{-x} = (\infty).(\infty) = \infty.$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} x^2e^{-x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = (aplicando - L'Hopital) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0$

Luego f posee la asíntota horizontal $y = 0$ en ∞ y no posee ninguna asíntota horizontal en $-\infty$.

Por otra parte, veamos si existe asíntota oblícua en $-\infty$. Para ello, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x} = -\infty;$ por tanto, no existe ninguna asíntota oblícua de f.

Por tanto, la gráfica de f es, aproximadamente la siguiente:



3. **Dada la función** $y = f(x)$ **definida implícitamente, cerca del punto** $x = 1$ **por la ecuación** $Ln(y) + aLn(x) = 1$, **donde a > 0, se pide:**

a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 1$.

b) Calcular $f''(1)$.

c) Dibujar aproximadamente la gráfica de la función $f(x)$ cerca del punto x=1. Sugerencia: si no se sabe hallar $f''(1)$, basta con suponer que $f''(1) > 0$.

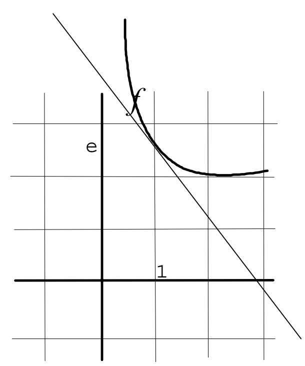
1'5 puntos

---

a) En primer lugar, derivamos la ecuación que define a f de forma implícita, y obtenemos: $\frac{y'}{y} + \frac{a}{x} = 0$. Y ahora, sustituyendo en el punto $x = 1, \quad y = e,$ la ecuación queda en: $\frac{y'}{e} + a = 0,$ es decir, y'=$-ae$. Por tanto, la ecuación de la recta tangente será: $y - e = (-ae).(x - 1) \Leftrightarrow y + aex = (a + 1)e$.

b) Derivando la ecuación $xy' + ay = 0$, obtenemos lo siguiente: $y' + xy'' + ay' = 0$. Y ahora, sustituyendo $x = 1, y = e, y' = -ae,$ se obtiene: $-ae + y'' - a^2e = 0 \Leftrightarrow y'' = ae + a^2e \Leftrightarrow f''(1) = a(a + 1)e$.

c) Por lo tanto, podemos deducir que, cerca del punto x = 1, la función es convexa, de modo que la gráfica de f queda por encima de la recta tangente $y + aex = (a + 1)e$. De esta forma, la gráfica de f cerca del punto x = 1 es, aproximadamente, así:



4. **Sea** $f(x)$ **una función definida en el intervalo** $[-2, 1]$, **que cumple** $f(-2) < f(1)$**. Se pide:**

a) Enunciar el teorema de los valores intermedios correspondiente a $f(x)$.

b) Considerar si la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$ satisface la hipótesis de dicho teorema y, de no hacerlo, estudiar si satisface su conclusión.

1 punto

---

a) Si $f(x)$ es contínua en [-2,1] y y_0 satisface que $f(-2) < y_0 < f(1)$, entonces existe al menos un punto c en el intervalo $(-2, 1)$ que cumple:

$f(c) = y_0$.

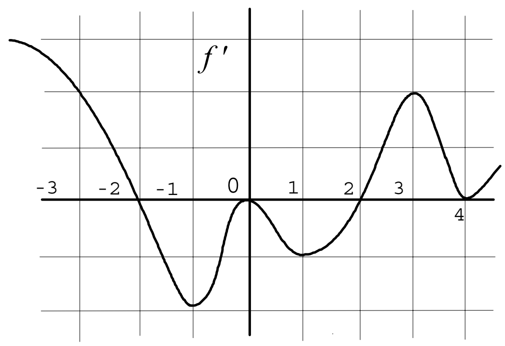
b) La función no satisface la hipótesis, pues f no es continua en x = 0. Sin embargo, sí se satisface la conclusión pues, dado y_0 que satisfaga $\frac{1}{4} = f(-2) < y_0 < f(1) = 1$, como $f(-1) = f(1)$, se cumple que $\frac{1}{4} = f(-2) < y_0 < f(-1) = 1$, luego existe un punto c en el intervalo $(-2, -1)$ que cumplen $f(c) = y_0$. Esto viene determinado por el teorema de los valores intermedios aplicado a la misma función, pero al intervalo $[-2, -1]$. Concretamente, el valor de c se puede hallar, pues $\frac{1}{c^2} = f(c) = y_0$ equivale a $c = -\sqrt{\frac{1}{y_0}}$.

5. **La siguiente figura muestra la gráfica de la derivada de** f.

a) Hallar los intervalos de crecimiento, decrecimiento y los extremos locales de f.

b) Hallar los intervalos de concavidad, convexidad y los puntos de inflexión de f .

1 punto



a) f es creciente en los intervalos $(-\infty,-2),(2,\infty)$, pues $f'(x) > 0$ en dichos intervalos, excepto en x=4.

f es decreciente en los intervalos (-2,2), pues $f'(x) < 0$ en dicho intervalo, excepto en x=0.

Por lo anterior, f alcanza un máximo local en el punto -2 y un mínimo local en el punto 2.

b) f es convexa en los intervalos $(-1,0),(1,3)$ y en $(4,\infty)$ pues $f'(x)$ es creciente en dichos intervalos.

f es cóncava en los intervalos ($-\infty$, -1), (0,1) y en (3, 4), pues $f'(x)$ es decreciente en dichos intervalos.

Por lo anterior, los puntos de inflexión de f son $-1,0,1,3,4$.

6. **Sean $C_1(x) = 100 + x + 0,02x^2$ y $C_2(x) = 200 + x + 0'01x^2$ las funciones de costes de dos plantas de una misma empresa.**

a) Supongamos en primer lugar que la empresa se plantea producir *a* unidades en una sola de las plantas. Hallar para qué valores de *a* la empresa preferirá concentrar su producción en la planta primera, y para qué valores de la producción *a* la empresa preferirá la planta segunda.

b) Supongamos ahora que la empresa ya produce la misma cantidad positiva *a* en las dos plantas, y se plantea aumentar la producción en *b* unidades en una sola de ellas. Hallar para qué valores de *b* la empresa preferirá aumentar su producción en la planta primera, y para qué valores de la producción *b* la empresa preferirá aumentar su producción en la planta segunda.

1 punto

---

a) En primer lugar, hallemos el valor x donde se igualan ambas funciones de costes.

$C_1(x) = C_2(x) \Leftrightarrow 100 + x + 0,02x^2$
$= 200 + x + 0'01x^2 \Leftrightarrow 0,01x^2 = 100 \Leftrightarrow x^2 = 100^2 \Leftrightarrow x = 100.$

Luego, la empresa concentrará su producción en la primera planta cuando a < 100, pues $C_1(x) < C_2(x)$ cuando x < 100.

Asimismo, la empresa concentrará su producción en la segunda planta cuando a > 100, pues $C_1(x) > C_2(x)$ cuando x > 100.

Finalmente, la empresa estará indiferente en concentrar su producción en la primera o en la segunda planta cuando x = 100.

b) Como la empresa ya produce en ambas plantas, los costes fijos no se tienen en cuenta. Por otra parte, como

$C_1'(x) = 1 + 0,04x > C_2'(x) = 1 + 0,02x$, para cualquier x > 0, es decir, los costes marginales son siempre menores en la segunda planta que en la primera, entonces la empresa preferirá siempre aumentar la producción en la segunda planta, independientemente de los valores de *a* y de *b*, siempre que *a* sea mayor que 0.

7. **Dada la función** $f(x) = \dfrac{1}{x-\sqrt{x}}$ **, se pide:**

a) Hallar la primitiva $F(x)$ de dicha función $f(x)$, cuando $x > 1$, que cumpla $F(4) = 2$.

b) Calcular el polinomio de Taylor de orden dos de dicha función $F(x)$ centrado en $a = 4$.

c) Utilizando el polinomio anterior, calcular aproximadamente $F(4'2)$ y $F(3'9)$.

1'5 puntos

a) Haciendo el cambio de variable $x = t^2 \Leftrightarrow t = \sqrt{x}$, podemos calcular la primitiva general de $f(x)$ de la siguiente forma:

$F(x) = \int f(x)dx = \int \frac{1}{t^2-t} 2tdt = 2\int \frac{1}{t-1}dt = 2Ln(t-1) + C = 2Ln(\sqrt{x}-1) + C$. Luego,

$2 = F(4) = 2Ln(\sqrt{4}-1) + C = 2Ln(2-1) + C = C$. Por tanto,

$F(x) = 2Ln(\sqrt{x}-1) + 2$.

b) Como $F(4) = 2, F'(4) = f(4) = \frac{1}{2}$, solo queda por hallar $F''(4)$. Para ello:

$F''(x) = f'(x) = \dfrac{-(1-\frac{1}{2\sqrt{x}})}{(x-\sqrt{x})^2}$, luego $F''(4) = \dfrac{-(1-\frac{1}{4})}{(4-2)^2} = \dfrac{-\frac{3}{4}}{4} = -\frac{3}{16}$. Por lo tanto:

$P(x) = 2 + \frac{1}{2}(x-4) - \frac{3}{32}(x-4)^2$.

c) $F(4'2) \approx P(4'2) = 2 + \frac{1}{2}(0'2) - \frac{3}{32}(0'2)^2 = 2'1 - \frac{0'03}{8} = \frac{16'77}{8}$ y, de la misma forma

$F(3'9) \approx P(3'9) = 2 + \frac{1}{2}(-0'1) - \frac{3}{32}(-0'1)^2 = 1'95 - \frac{0'03}{32} = \frac{62'37}{32}$

8. **Se considera el recinto siguiente**: $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 0, x^3 \leq y \leq x^2\}$. Se pide:

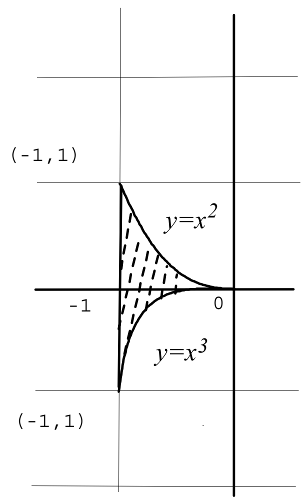
a) Dibujar el recinto.

b) Hallar los elementos maximales y minimales de dicho recinto, considerando el orden de Pareto.

c) Hallar el área de dicho recinto.

1'5 puntos

a) El recinto es, aproximadamente, el siguiente:



b) Elementos maximales: $\{(x,y) : y = x^2, -1 \leq x \leq 0\}$.

Elementos minimales: $(-1,-1)$.

c) Como la parábola $y = x^2$ está siempre por encima de la curva $y = x^3$, el área será el siguiente valor:

área = $\int_{-1}^{0} (x^2 - x^3)dx = [\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}]_{-1}^{0} = -(\frac{-1}{3} - \frac{1}{4}) = \frac{7}{12}$.