Universidad Carlos III de Madrid

Departmento de Economía **Matemáticas I Examen Final** **23 junio 2022**

Duración: 2 horas.

APELLIDOS:		**NOMBRE:**
ID:	**GRADO:**	**GRUPO:**

(1) **Sea** $C(x) = b + 16x + 4x^2$ **la función de costes y** $p(x) = a - x$ **la función inversa de demanda de una empresa monopolista, donde** $a, b > 0$**. Se pide:**

(a) Si sabemos que el nivel de producción para el que se maximiza el beneficio es $x^* = 5$, calcular el valor del parámetro a.

(b) Si sabemos que el nivel de producción para el que se maximiza el beneficio medio es $x^{**} = 4$, calcular el valor del parámetro b.

0,5 puntos apartado a); 0,5 puntos apartado b).

(a) En primer lugar, calculamos la función de beneficios.

$B(x) = (a - x)x - (b + 16x + 4x^2) = -5x^2 + (a - 16)x - b$

Si calculamos la primera y segunda derivada de B :

$B'(x) = -10x + a - 16; B''(x) = -10 < 0$

luego vemos que B tiene un único punto crítico en $x^* = \dfrac{a-16}{10}$ y, como B es una función cóncava, este punto crítico es el único maximizador global.

Luego $x^* = 5 = \dfrac{a-16}{10} \Longrightarrow a - 16 = 50 \Longrightarrow a = 66$

(b) Como la función de beneficio medio es $\dfrac{B(x)}{x} = -5x + (a - 16) - \dfrac{b}{x}$,

su derivada será: $\left(\dfrac{B(x)}{x}\right)' = -5 + \dfrac{b}{x^2} = 0 \Longleftrightarrow x^2 = \dfrac{b}{5}$.

Como $\left(\dfrac{B(x)}{x}\right)'' = -\dfrac{2b}{x^3} < 0$, la función es cóncava y el punto crítico será maximizador global.

Luego $x^{**} = 4 = \sqrt{\dfrac{b}{5}} \Longrightarrow b = 80$

(2) **Dada la función** $y = f(x)$, **definida de forma implícita mediante la ecuación** $e^{x+y} + xy^2 = e$ **en un entorno del punto** $x = 1, y = 0$, **se pide:**

(a) Hallar la recta tangente y el polinomio de Taylor de orden 2 de f en $a = 1$.

(b) Representar la gráfica de f cerca del punto $x = 1, y = 0$.

(c) Calcular aproximadamente, utilizando el polinomio de Taylor de orden 2, $f(0,9)$ y $f(1,2)$.

Mediante dicho polinomio, comparar $f(1)$ con $\frac{2}{3}f(0,9) + \frac{1}{3}f(1,2)$.

Sugerencia para b y c: utilizar que $f''(1) < 0$.

0,4 puntos apartado a); 0,2 puntos apartado b); 0,4 puntos apartado c).

(a) En primer lugar, calculamos la derivada primera de la función:

$e^{x+y}(1 + y') + y^2 + 2xyy' = 0$

sustituyendo $x = 1,\ y(1) = 0$ se deduce que $y'(1) = f'(1) = -1$.

Luego la ecuación de la recta tangente será: $y = P_1(x) = -(x - 1)$ o $x + y = 1$.

Análogamente, calculamos la derivada segunda de la función:

$e^{x+y}[(1 + y')^2 + y''] + 2yy' + 2yy' + 2x(y')^2 + 2xyy'' = 0$

sustituyendo $x = 1, y(1) = 0, y'(1) = -1$ se deduce que $y''(1) = f''(1) = -2/e$.

Luego la ecuación del polinomio de Taylor será: $y = P_2(x) = -(x - 1) - \frac{1}{e}(x - 1)^2$

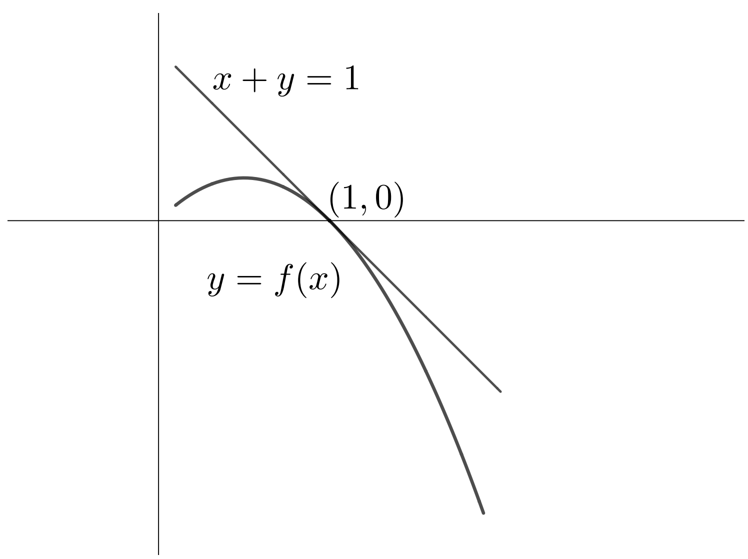
(b) Utilizando el polinomio de Taylor de orden 2, la gráfica de f, cerca del punto $x = 1$ será, aproximadamente, como se ve en la figura al final.

(c) Por otro lado, utilizando el polinomio de Taylor, tenemos que:

$f(0,9) \approx 0,1 - \dfrac{1}{e}\ 0,01$; $f(1,2) \approx -0,2 - \dfrac{1}{e}0,04 \Longrightarrow$

$\frac{2}{3}f(0,9) + \frac{1}{3}f(1,2) = -\dfrac{1}{e}0,02 < 0 = f(1) = f(\frac{2}{3}0,9 + \frac{1}{3}1,2)$.

Lo cual es esperable, debido a que $f(x)$ es cóncava cerca de $x = 1$.



(3) **Sea la función** $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$**. Se pide:**

(a) Hallar el dominio y las asíntotas de $f(x)$.

(b) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y la imagen de $f(x)$. Representar la gráfica de la función.

(c) Considerar $f_1(x)$ la función $f(x)$ restringida al intervalo $[0, \infty)$. Hallar, si existen, los extremos globales de $f_1(x)$.

0,4 puntos apartado a); 0,4 puntos apartado b); 0,2 puntos apartado c)

(a) En primer lugar, el dominio de la función es $\mathbb{R} - \{-1\}$.

Si hacemos el límite por la derecha en $x = -1$ obtenemos $\lim_{x\to -1^+} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} = \dfrac{\sqrt{2}}{0^+} = \infty$.

Análogamente por la izquierda $\lim_{x\to -1^-} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} = \dfrac{\sqrt{2}}{0^-} = -\infty$.

Por lo tanto f tiene a $x = -1$ como asíntota vertical.

Para las asíntotas horizontales, si hacemos el límite hacia ∞ obtenemos que $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$ =(dividiendo númerador y denominador por x) = = $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{1+1/x^2}}{1+1/x} = 1$.

Por lo tanto f tiene asíntota horizontal $y = 1$ en ∞.

Hallando ahora el límite hacia $-\infty$ de f obtenemos que $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$ =(dividiendo númerador y denominador por $-x$, que pasa dentro de la raíz como $1/x^2$) = $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{1+1/x^2}}{-1-1/x} = -1$.

Por lo tanto, f tiene asíntota horizontal $y = -1$ en $-\infty$. Obviamente, como hay dos asíntotas horizontales, no puede haber asíntotas oblícuas en este caso.

(b) Para estudiar el crecimiento y decrecimiento, derivamos la función y estudiamos su signo:

$f'(x) = (\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1})' = \dfrac{(2x/2\sqrt{x^2+1})(x+1) - \sqrt{x^2+1}}{(x+1)^2} = \dfrac{x(x+1)-(x^2+1)}{(x+1)^2\sqrt{x^2+1}} =$

$= \dfrac{x-1}{(x+1)^2\sqrt{x^2+1}}$, luego observamos que su signo viene determinado por el signo de $x-1$, pues el denominador siempre es positivo. De donde obtenemos que:

i) $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (1, \infty)$, luego f es creciente en $[1, \infty)$.

ii) $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1)$, luego f es decreciente en $(-\infty, -1)$ y en $(-1, 1)$.

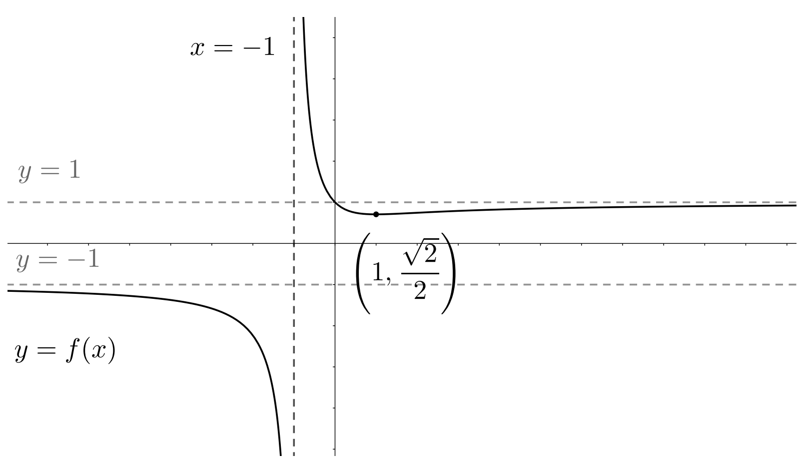
En cuanto a la imagen, como $f(x)$ es continua en su dominio, por el teorema de los valores intermedios se deduce que:

i) la imagen del intervalo $(-\infty, -1)$ será $(-\infty, -1)$.

ii) la imagen del intervalo $(-1, \infty)$, teniendo en cuenta que $f(1) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, será $[\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \infty)$.

Por tanto, la imagen de f será $(-\infty, -1) \cup [\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \infty)$.

En cuanto a la gráfica, tendrá un aspecto, aproximadamente, así:



(c) En cuanto a los extremos globales de f_1, $x = 1$ será el minimizador global, pues f_1 es decreciente en $[0, 1]$ y creciente en $[1, \infty)$.

Por otro lado, $x = 0$ es el maximizador global de $f_1(x)$ pues, como f_1 es decreciente en $[0, 1]$ y creciente en $[1, \infty)$, y $f_1(x)$ tiene como asíntota horizontal $y = 1 = f_1(0)$, se deduce que $f_1(x) \leq 1 = f_1(0)$.

(4) **Sea**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x^2+1)}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

Se pide:

(a) Comprobar que la función anterior es derivable en 0.

(b) Hallar las asíntotas de dicha función.

(c) Considerar $f_1(x)$ la función $f(x)$ restringida al intervalo $[0, \infty)$. Hallar el mínimo global de dicha función y estudiar si dicha función alcanza máximo global.

Sugerencia: no se pide calcular el máximo, sino saber si existe o no.

0,4 puntos apartado a); 0,2 puntos apartado b); 0,4 puntos apartado c).

(a) En primer lugar, estudiamos si la función es continua en $x = 0$. Para ello:

$\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\ln(x^2+1)}{x} = \frac{0}{0} =$ (L'Hopital)$= \lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{2x}{x^2+1} = 0$, luego dicha función es continua en 0.

Para estudiar si la función es derivable en dicho punto, como es continua, habrá que estudiar si existe el límite:

$\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f'(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{[2x/(x^2+1)]x - \ln(x^2+1)}{x^2} = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{2x^2/(x^2+1)}{x^2} - \lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\ln(x^2+1)}{x^2}$.

El primer límite es, obviamente, 2. En cuanto al segundo:

$\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\ln(x^2+1)}{x^2} = \frac{0}{0} =$ (L'Hopital)$= \lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{2x/(x^2+1)}{2x} = 1$.

Luego se deduce que $f\,'(0) = 1$.

(b) Obviamente, dicha función no tiene asíntotas verticales, pues es continua en su dominio.

En cuanto a asíntotas en el infinito, como:

$\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{\ln(x^2+1)}{x} = \frac{\infty}{\infty} =$ (L'Hopital)$= \lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{2x}{x^2+1} = 0$, luego la asíntota horizontal es $y = 0$.

Análogamente, $y = 0$ es la asíntota en $-\infty$.

(c) Como $f(x) > 0$ si $x > 0$ (pues $\ln(1+x^2) > \ln 1 = 0$, si $x > 0$),

se deduce que $x = 0$ es el minimizador global y $f(0) = 0$ el mínimo global.

En cuanto al máximo global, existe pues, como $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} f(x) = 0$,

dado $f(1) = \ln 2 > 0$, podemos encontrar $M > 0$ tal que:

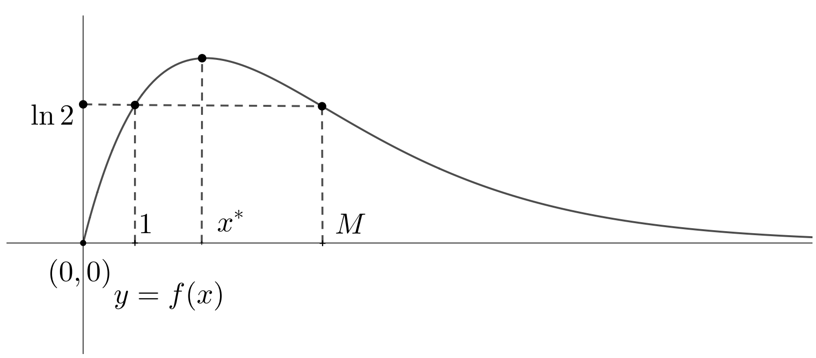
$f(x) < f(1)$ si $x > M$.

Y ahora, aplicando el teorema de Weierstrass a f en el intervalo $[0, M]$,

existe x^* maximizador de f en dicho intervalo.

Obviamente, x^* es también maximizador de f en $[0, \infty)$.

Ver el dibujo siguiente:

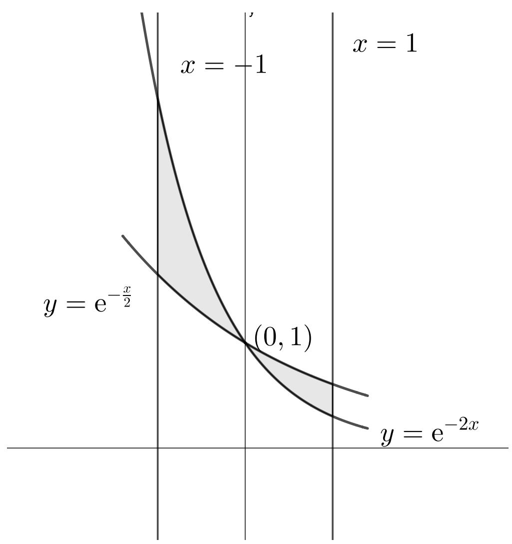


(5) **Dadas la funciones $f, g : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, definidas por: $f(x) = e^{-2x}$, $g(x) = e^{-x/2}$, se pide:**

(a) Representar aproximadamente el conjunto A, delimitado por las gráficas de dichas funciones, y las rectas $x = -1, x = 1$.
Hallar, si existen, los maximales y minimales, máximo y mínimo de A.

(b) Calcular el área del conjunto dado.
Sugerencia para a: el orden de Pareto viene dado por: $(x_0, y_0) \leq_P (x_1, y_1) \Longleftrightarrow x_0 \leq x_1, y_0 \leq y_1$.
0,6 puntos apartado a); 0,4 puntos apartado b)

(a) En primer lugar observamos que $f(0) = g(0) = 1$. Por otro lado:
i) si $x > 0, f\ (x) < g(x)$, ya que $\dfrac{f(x)}{g(x)} = e^{-3x/2} < 1$; y
ii) si $x < 0, f\ (x) > g(x)$, ya que $\dfrac{f(x)}{g(x)} = e^{-3x/2} > 1$.
Como, además, $f(x), g(x) > 0$, se deduce que el dibujo de A será, aproximadamente:



Por tanto, el orden de Pareto nos describe al conjunto así:
máximo(A), mínimo no existen.
maximales$(A) = \{(x, f(x)) : -1 \leq x \leq 0\} \cup \{(x, g(x)) : 0 \leq x \leq 1\}$.
minimales$(A)\} = \{(x, g(x)) : -1 \leq x \leq 0\} \cup \{(x, f(x)) : 0 \leq x \leq 1\}$.

(b) En primer lugar, por la posición de las funciones, sabemos que:
área(A)$= \int_{-1}^{0} (e^{-2x} - e^{-x/2})dx + \int_{0}^{1} (e^{-x/2} - e^{-2x})dx =$
$= [-e^{-2x}/2 + 2e^{-x/2}]_{-1}^{0} + [-2e^{-x/2} + e^{-2x}/2]_{0}^{1} =$
$= [-1/2 + 2 + e^{2}/2 - 2e^{1/2}] + [-2e^{-1/2} + e^{-2}/2 + 2 - 1/2] =$
$= 3 + e^{2}/2 - 2e^{1/2} - 2e^{-1/2} + e^{-2}/2$ unidades de área.