Universidad Carlos III de Madrid

Exercise	1	2	3	4	5	6	Total
Points							

Departmento de Economía **Matematicas I Examen Final** **25 junio 2021**

Duración: 2 horas.

APELLIDOS:		**NOMBRE:**
ID:	**GRADO:**	**GRUPO:**

(1) **Sea la función $f(x) = \ln(ex - x^2)$. Se pide:**

(a) Hallar las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

(b) Hallar los extremos locales y globales y la imagen de $f(x)$.
Representar la gráfica de la función.

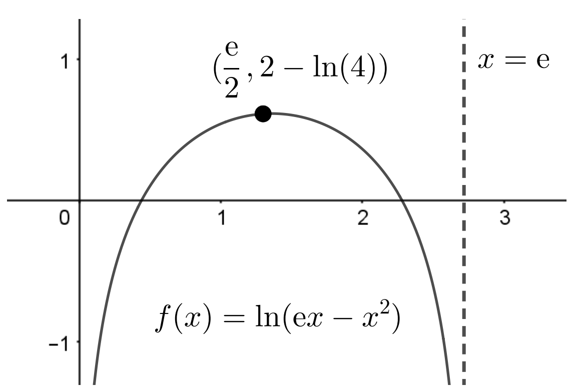
(c) Considerar $f_1(x)$ la función $f(x)$ restringida al intervalo donde $f(x)$ es creciente.
Representar la gráfica de la inversa de $f_1(x)$.
Sugerencia para las representaciones: utilizar que $1 < \ln 4 < 2$.
0,4 puntos apartado a); 0,4 puntos apartado b); 0,2 puntos apartado c).

---

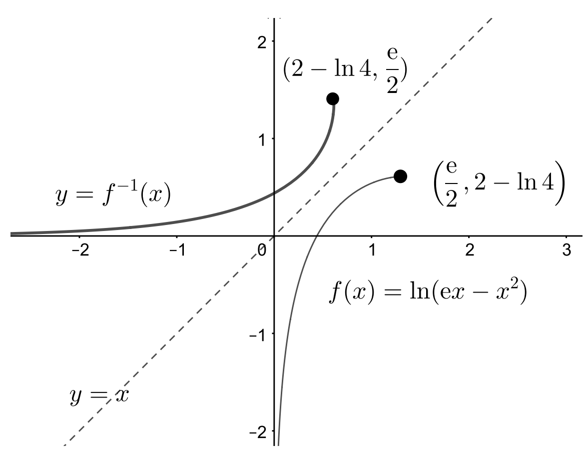
a) El dominio de la función anterior es $(0, e)$.
Como f es continua en su dominio, un conjunto acotado, solo hay que estudiar las asíntotas en 0 y en e :
i) $\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \ln(0^+) = -\infty$, $\lim_{x \longrightarrow e^-} f(x) = \ln(0^+) = -\infty$.
Luego $f(x)$ tiene asíntota vertical en $x = 0$ y en $x = e$.
Por otro lado, como $f\,'(x) = \dfrac{e - 2x}{ex - x^2}$, se deduce que f es creciente $\Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow f\,'(x) > 0 \Longleftrightarrow e - 2x > 0$;
luego f es creciente en $(0, \frac{e}{2}]$. Análogamente, f es decreciente en $[\frac{e}{2}, e)$.

b) De lo anterior se deduce que no existen minimizadores, ni locales ni globales y que $x = \frac{e}{2}$ es el único maximizador local y global.
Finalmente, como $f(\frac{e}{2}) = \ln(e^2/4) = 2 - \ln 4$ y $\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, por el teorema de los valores intermedios se deduce que la imagen será $(-\infty, 2 - \ln 4]$.
Así pues, la gráfica de la función será, aproximadamente, como la figura A.

c) Como se puede apreciar, f_1 es creciente en $(0, \frac{e}{2}]$, $f_1(0^+) = -\infty$, $f_1(\frac{e}{2}) = 2 - \ln 4$,
Luego su función inversa será creciente, $\lim_{x \longrightarrow -\infty} f_1^{-1}(x) = 0^+$, $f_1^{-1}(2 - \ln 4) = \frac{e}{2}$.
Luego su gráfica será, aproximadamente, como la figura B.



(A)



(B)

(2) **Dada la función $y = f(x)$, definida de forma implícita mediante la ecuación $e^{xy} + x^2 + y^2 = 5$ en un entorno del punto $x = 2, y = 0$, se pide:**

(a) Hallar la recta tangente y el polinomio de Taylor de grado 2 de la función centrado en $a = 2$.

(b) Representar la gráfica de f cerca del punto $x = 2, y = 0$.
Calcular, utilizando la recta tangente, el valor aproximado de $f(1,9)$ y de $f(2,1)$.

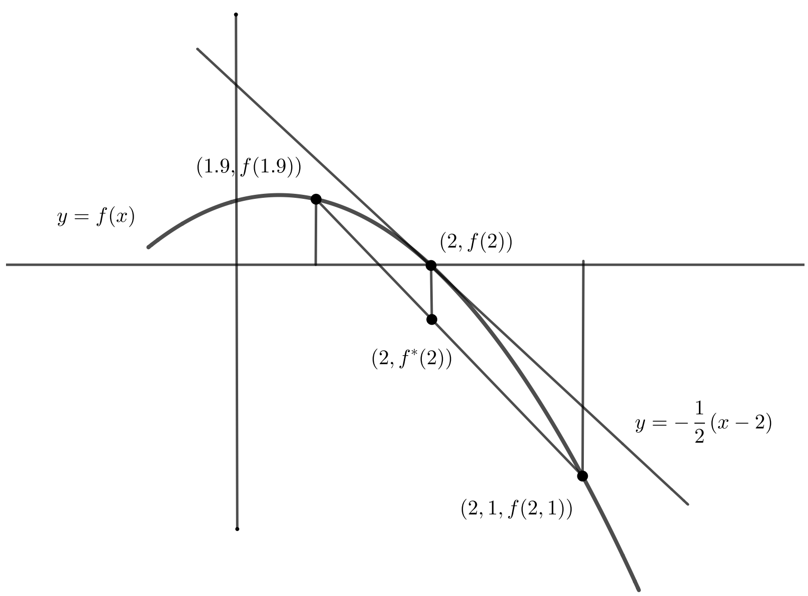
(c) ¿Será $f(2)$ mayor, menor o igual que el valor exacto de $\frac{1}{2}(f(1,9) + f(2,1))$?
Sugerencia para c: utilizar que $f''(2) < 0$.
0,4 puntos apartado a); 0,3 puntos apartado b); 0,3 puntos apartado c).

---

a) En primer lugar, calculamos la derivada primera de la función:
$e^{xy}(y + xy') + 2x + 2yy' = 0$
sustituyendo $x = 2,\ y = 0$ se deduce que $2y' + 4 = 0 \Longrightarrow y'(2) = f\ '(2) = -2$.
Luego la ecuación de la recta tangente será: $y = P_1(x) = -2(x - 2)$.
Análogamente, calculamos la derivada segunda de la función:
$e^{xy}(y + xy')^2 + e^{xy}(2y' + xy'') + 2 + 2(y')^2 + 2yy'' = 0$
sustituyendo $x = 2, y = 0, y' = -2$ se deduce que $y''(2) = f(2) = -11$.
Luego la ecuación del polinomio de Taylor será: $y = P_2(x) = -2(x - 2) - \frac{11}{2}(x - 2)^2$

b) Utilizando el polinomio de Taylor de orden 2, la gráfica de f, cerca del punto $x = 2$ será, aproximadamente, como se ve en la figura al final.
Por otro lado, utilizando la recta tangente, tenemos que:
$f(1,9) \approx -2(-0,1) = 0,2; f(2,1) \approx -2(0,1) = -0,2.$

c) Finalmente, como la función $f(x)$ es cóncava cerca de $x = 2$, $\frac{1}{2}(f(1,9) + f(2,1))$ será menor que $f(2) = 0$, como se puede ver por la gráfica o, si se prefiere, calculando aproximadamente por el polinomio de Taylor de orden 2 los valores de $f(1,9)$ y $f(2,1)$);
$\frac{1}{2}(f(1,9) + f(2,1)) \approx -\frac{11}{2} \cdot 0,1^2$
Llamando $f^*(2) = \frac{1}{2}(f(1,9) + f(2,1))$, el dibujo quedaría, aproximadamente, así:



(3) **Sea $C(x) = \sqrt{5x^2 - 6x + 9}$ la función de costes de una compañía monopolista, donde $x \geq 1$ representa la cantidad en kilogramos de dicho producto. Se pide:**

(a) Hallar la ecuación de la recta tangente a $C(x)$ en $x = 3$, y calcule una aproximación al valor de $C(\ 3,1)$.

(b) Supongamos ahora que la función de demanda inversa es $p(x) = 29 - bx^2$, siendo $b \neq 1, b$ próximo a 1.
Y supongamos también que en el período anterior la empresa produjo 3 unidades.
¿Aumentará o disminuirá en este período la empresa su producción?
0,5 puntos apartado a); 0,5 puntos apartado b)

---

a) En primer lugar, $C'(x) = \dfrac{10x - 6}{2\sqrt{5x^2 - 6x + 9}}$, luego $C'(3) = \dfrac{24}{2\sqrt{36}} = 2$.
Por otro lado, como $C(3) = 6$, la ecuación de la recta tangente será:
$y = 6 + 2(x - 3)$
Ahora, aproximando $C(3,1)$ por la recta tangente, obtenemos:
$C(3,1) \approx 6 + 2(3,1 - 3) = 6,2$ unidades monetarias.
.

b) En primer lugar, los beneficios de la empresa serán:
$B(x) = (29 - bx^2)x - C(x)$. Por tanto,
$B'(x) = 29 - 3bx^2 - C'(x) \Longrightarrow B'(3) = 29 - 27b - C'(3) = 27(1 - b)$.
Por tanto, tendríamos dos casos:
i) si $b < 1$, entonces la empresa aumentará su producción.
ii) si $b > 1$, entonces la empresa reducirá su producción.

(4) **Sea $f(x) = x^4 - 2x^2$. Se pide:**

(a) Enunciar el teorema de Bolzano de los ceros para una función g definida en un intervalo $[a, b]$.

(b) Sea $a = -2$. Determinar b para que $f(x)$ cumpla las hipótesis de dicho teorema.

(c) Sea $a = -2$. Determinar b para que $f(x)$ cumpla la tesis de dicho teorema.

Sugerencia para b) y c): representar la función.

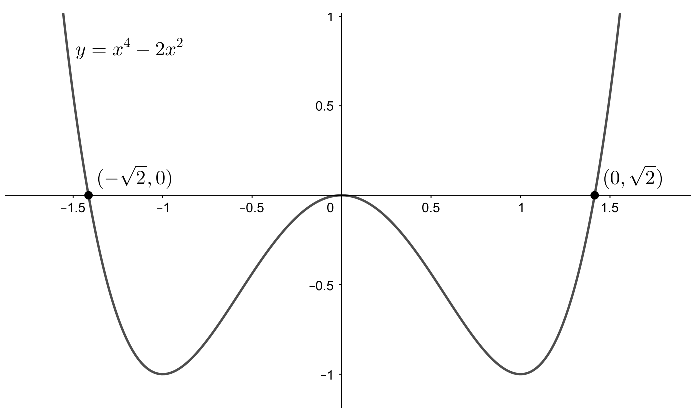
0,2 puntos apartado a); 0,4 puntos apartado b); 0,4 puntos apartado c).

---

a) El teorema de los ceros afirma que si una función g es continua en el intervalo $[a, b]$,
y si cumple que
i) $g(a) < 0 < g(b)$; o bien
ii) $g(b) < 0 < g(a)$
entonces existe un punto c en (a, b) que cumple $g(c) = 0$.

b) Como $f(-2) > 0$, entonces b debe cumplir que $f(b) < 0$; es decir, $b \in (-\sqrt{2}, 0) \cup (0, \sqrt{2})$.

c) Hace falta que exista algún cero de dicho polinomio en el intervalo (a, b).
Por tanto, $b \in (-\sqrt{2}, \infty)$.
Observación: como $f(x) = x^2(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$, se deduce que:
i) $f(x) < 0$ si $x \in (-\sqrt{2}, 0) \cup (0, \sqrt{2})$;
ii) $f(x) > 0$ si $x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$.
Por tanto, la gráfica de f será, aproximadamene, así:



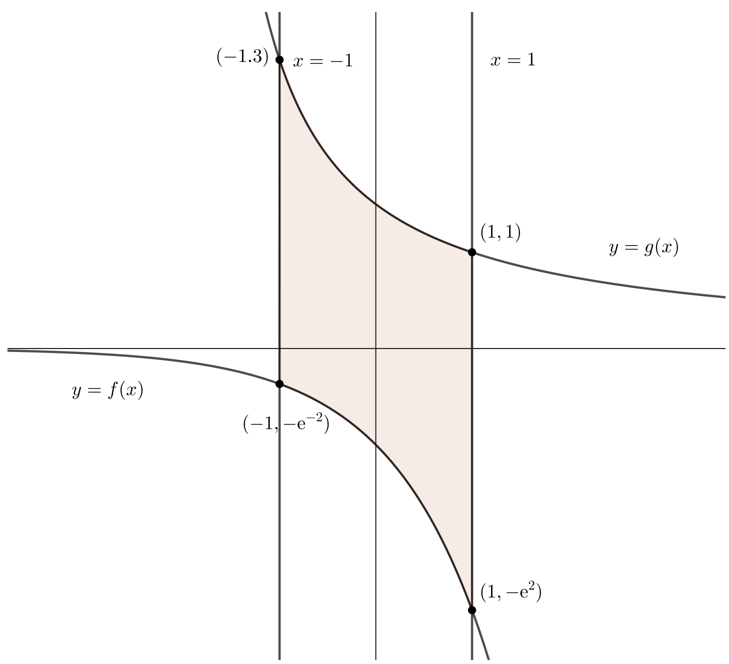
(5) **Dadas la funciones** $f, g : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, **definidas por:** $f(x) = -e^{2x}, g(x) = \dfrac{3}{2+x}$, **se pide:**

(a) Representar aproximadamente el conjunto A, delimitado por las gráficas de dichas funciones y las rectas $x = -1, x = 1$.
Hallar, si existen, los maximales y minimales, máximo y mínimo de A.

(b) Calcular el área del conjunto dado.
Sugerencia para a: el orden de Pareto viene dado por: $(x_0, y_0) \leq_P (x_1, y_1) \Longleftrightarrow x_0 \leq x_1, y_0 \leq y_1$.
0,6 puntos apartado a); 0,4 puntos apartado b)

---

a) $f\ (x)$ y $g(x)$ son decrecientes. Además, como $f(x) < 0 < g(x)$, el dibujo de A será, aproximadamente, así:



Así pues, el orden de Pareto nos describe al conjunto así:
máximo(A), mínimo (A) no existen.
minimales$(A) = \{(x, f(x)) : x \in [-1,1]\}$
maximales$(A) = \{(x, g(x)) : x \in [-1,1]\}$

b) En primer lugar, por la posición de las funciones, sabemos que:
área(A)$= \int_{-1}^{1} (g(x) - f(x))dx = \int_{-1}^{1} (\dfrac{3}{2+x} + e^{2x})dx =$
(aplicando la regla de Barrow, obtenemos que)
$= [3\ln(2+x) + \frac{1}{2}e^{2x}]_{-1}^{1} = (3\ln 3 + \frac{1}{2}e^{2}) - (0 + \frac{1}{2}e^{-2}) =$
$= 3\ln 3 + \frac{1}{2}e^{2} - \frac{1}{2}e^{-2}$ unidades de área.

(6) **Dada la función** $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$**, definida en** $(-1, \infty)$**, se pide:**

(a) Hallar la ecuación de la primitiva $F(x)$ de $f(x)$ que cumpla que $F(0) = \frac{2}{3}$.

(b) Estudiar la concavidad, convexidad y puntos de inflexión de la primitiva $F(x)$ anterior.

Sugerencia para b: no es necesario para resolver esta parte haber resuelto la parte a.

(c) ¿Qué se puede decir de $F(x)$ en el punto $x = 0$?

0,4 puntos apartado a); 0,4 puntos apartado b); 0,2 puntos apartado c)

---

a) Haciendo el cambio de variable $x + 1 = t^2, dx = 2tdt$, se deduce que la primitiva de f será así:

$F(x) = \displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx = \int \frac{t^2-1}{t} 2tdt = 2\int (t^2 - 1)dt = 2(t^3/3 - t) + C =$

$= \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - 2\sqrt{x+1} + C$

Como $\frac{2}{3} = F(0) = \frac{2}{3} - 2 + C$, se deduce que $C = 2$.

La primitiva también se puede resolver fácilmente como

- integral por partes tomando $f = x$, $g' = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ y $g = 2\sqrt{x+1}$
- con el cambio de variable $x + 1 = t$
- añadiendo $+1 - 1$ en el numerador

b) i) en primer lugar, $F'(x) = f(x)$, por el teorema fundamental del cálculo.

ii) Luego $F''(x) = f\,'(x) = \dfrac{\sqrt{x+1} - x\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{(\sqrt{x+1})^2} = \dfrac{x+2}{2\sqrt{x+1}(x+1)}$

iii) Por tanto, $F''(x) > 0 \Longleftrightarrow x + 2 > 0 \Longleftrightarrow x > -2$

Luego $F(x)$ es convexa en en todo su dominio $(-1, \infty]$

c) Como F es convexa en todo su dominio, alcanza en $x = 0$ un mínimo global, pues $x = 0$ es un punto crítico al verificarse $F'(0) = 0$.