	Exercise	1	2	3	4	5	6	Total
Universidad Carlos III de Madrid	Points							

Departmento de Economía **Matematicas I Examen Final** **27 junio 2019**

Duración: 2 horas.

APELLIDOS:		**NOMBRE:**
ID:	**GRADO:**	**GRUPO:**

(1) **Sea la función** $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$**. Se pide:**

(a) Hallar el dominio y asíntotas de la función.

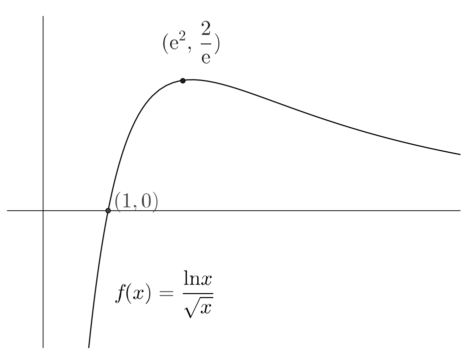
(b) Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos locales y globales de $f(x)$. Hallar la imagen de $f(x)$ y dibujar su gráfica.

0,3 puntos apartado a); 0,7 puntos apartado b)

---

a) El dominio de la función anterior es $(0, \infty)$. Por tanto, no hay asíntotas en $-\infty$.
Como la función es continua en su dominio, solo hay que estudiar las posibles asíntotas verticales en 0^+ :
$\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \dfrac{\ln(0^+)}{0^+} = \dfrac{-\infty}{0^+} = -\infty$; luego la función tiene asíntota vertical en $x = 0^+$.
Por otro lado, $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = \dfrac{\infty}{\infty} =$ (aplicando L'Hopital) $=$
$= \lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{1/x}{1/2\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{2}{\sqrt{x}} = 0.$
Luego la función tiene una asíntota horizontal $y = 0$ en ∞.

b) Como $f\,'(x) = \dfrac{(1/x)\sqrt{x} - (1/2\sqrt{x})\ln x}{x}$, se deduce que :
f es creciente $\Longleftrightarrow f\,'(x) > 0 \Longleftrightarrow (1/x)\sqrt{x} - (1/2\sqrt{x})\ln x > 0 \Longleftrightarrow$ (multiplicando por $2\sqrt{x}$) $\Longleftrightarrow 2 - \ln x > 0 \Longleftrightarrow 2 > \ln x \Longleftrightarrow x < e^2$; luego f creciente en $(0, e^2]$.
Análogamente, f es decreciente en $[e^2, \infty)$.
De lo anterior se deduce que f alcanza un máximo local y global en $x = e^2$.
Análogamente, f no posee mínimo ni local ni global.
También se deduce de lo anterior que, como $f(e^2) = \dfrac{\ln(e^2)}{\sqrt{e^2}} = \dfrac{2}{e}$, $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = -\infty$,
$\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} f(x) = 0$, por el teorema de los valores intermedios se deduce que
la imagen de la función es $(-\infty,\ f(2)] = (-\infty, f(\dfrac{2}{e})]$
Conclusión: la gráfica de f tendrá un apariencia, aproximadamente, así:



(2) **Dada la función** $y = f(x)$, **definida de forma implícita mediante la ecuación** $\ln(2x + y) + 3y = 10x + 3$ **en un entorno del punto** $x = 0, y = 1$, **se pide:**

(a) Hallar la recta tangente y el polinomio de Taylor de grado 2 de la función centrado en $a = 0$.

(b) Representar la gráfica de f cerca del punto $x = 0$ y utilizar la recta tangente para obtener una aproximación de los valores de $f(-0,1)$ y de $f(0,2)$.

¿Puedes justificar si alguna de dichas aproximaciones es por defecto o por exceso?

0,6 puntos apartado a); 0,4 puntos apartado b)

---

a) En primer lugar, calculamos la derivada primera de la función:

$\dfrac{2+y'}{2x+y} + 3y' = 10$

sustituyendo $x = 0,\ y(0) = 1$ se deduce que:

$2 + 4y'(0) = 10 \Longrightarrow y'(0) = f\ '(0) = 2$

Luego la ecuación de la recta tangente será: $y = P_1(x) = 1 + 2(x - 0)$, es decir, $y = 1 + 2x$.

Análogamente, calculamos la derivada segunda de la función:

$\dfrac{y"(2x+y) - (2+y')^2}{(2x+y)^2} + 3y" = 0$

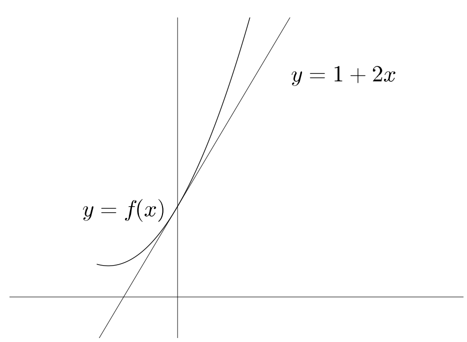
sustituyendo $y(0) = 1, y'(0) = 2$ se deduce que:

$4y"(0) - 16 = 0 \Longrightarrow y"(0) = f\ "(0) = 4$

Luego la ecuación del polinomio de Taylor será: $y = P_2(x) = 1 + 2x + \frac{4}{2}x^2$

.

b) Utilizando el polinomio de Taylor de orden 2, la gráfica de f cerca del punto $x = 0$ será, aproximadamente, así:



Por otro lado, las aproximaciones de primer orden serán:

$f(-0,1) \approx P_1(-0,1) = 0,8$; $f(0,2) \approx P_1(0,2) = 1.4$

Como la función es convexa cerca de $x = 0$, pues $f"(0) > 0$, la aproximación de los valores de f por la recta tangente será, en ambos casos, por defecto.

(3) **Sea $C(x) = C_0 + ax + 2x^2$ la función de costes y $p(x) = 100 - x$ la función inversa de demanda de una empresa monopolista, siendo $x \geqslant 0$ el número de unidades producidas de cierta mercancía. Se pide:**

(a) Determinar a y C_0 de modo que la producción $x = 15$ maximice el beneficio.

(b) Supongamos ahora que $C_0 = 200$. Determinar a de modo que el coste medio mínimo sea de 50 unidades monetarias.

0,5 puntos apartado a); 0,5 puntos apartado b)

---

a) En primer lugar, calculamos la función de beneficios.
$B(x) = (100 - x)x - (C_0 + ax + 2x^2) = -3x^2 + (100 - a)x - C_0$
Si calculamos la primera y segunda derivada de B :
$B'(x) = -6x + 100 - a; B"(x) = -6 < 0$
luego vemos que B tiene un único punto crítico en $x = \dfrac{100 - a}{6} = 15$ cuando $a = 10$ y,
como B es una función cóncava, este punto crítico es el único maximizador global.
C_0 puede ser cualquier valor.

b) La función de costes es $C_m(x) = \dfrac{C(x)}{x} = \dfrac{200}{x} + a + 2x$.
Si calculamos su dos primeras derivadas:
$C'_m(x) = \dfrac{-200}{x^2} + 2; C"_m(x) = 2\dfrac{200}{x^3} > 0$
observamos que si $C'_m(x) = \dfrac{-200}{x^2} + 2 = 0 \Longleftrightarrow x^2 = 100$,
luego $x = 10$ es el único punto crítico de la función $C_m(x)$.
Y, como dicha función de costes medios es convexa, dicho punto crítico es el único minimizador global.
Por lo tanto, la producción que minimiza el coste medio será: $x = 10$.
Y, sustituyendo en la función de costes medios, como el coste medio mínimo es de 50:
$C_m(10) = \dfrac{200}{10} + a + 20 = 50$. Luego $a = 10$.

(4) **Sea la función** $f(x) = \begin{cases} a & si\ x = -1 \\ \sqrt[3]{x} & si\ -1 < x < 8 \\ b & si\ x = 8 \end{cases}$ **definida a trozos en el intervalo** $[-1, 8]$**. Se pide:**

(a) Determinar a y b para que $f(x)$ satisfaga las hipótesis (o condiciones iniciales) del teorema de Weierstrass en dicho intervalo.

(b) Determinar los valores a, b para que se cumpla la tesis (o conclusión) del teorema.
Sugerencia para los apartados a y b: enunciar el teorema de Weierstrass.

(c) Determinar a y b para que $f(x)$ sea creciente en el intervalo $[-1, 8]$.
¿Puede ser $f(x)$ creciente y discontinua?
Sugerencia para el apartado c: dar valores concretos a, b.
0,3 puntos apartado a); 0,4 puntos apartado b); 0,3 puntos apartado c)

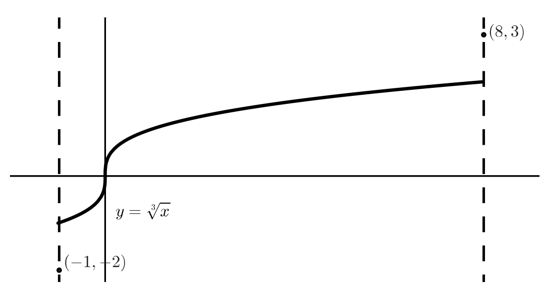
---

a) Necesitamos imponer la continuidad en $x = -1^+$ y en $x = 8^-$.
Para ello, como $\lim\limits_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = \sqrt[3]{-1} = -1, f(-1) = a$
se deduce que la función será continua en -1 por la derecha cuando $a = -1$.

Por otro lado, para que la función sea continua en $x = 8^-$, como:
$\lim\limits_{x \longrightarrow -8^-} f(x) = \sqrt[3]{8} = 2, f(8) = b$
se deduce que la función será continua en 8 por la izquierda cuando $b = 2$.

b) Obviamente, se cumple la conclusión del teorema de Weierstrass cuando la imagen tiene máximo y mínimo.
La imagen, obviamente, es el conjunto $(-1, 2) \cup \{a, b\}$.
Por lo tanto, se cumple la conclusión del teorema cuando
$\min(a, b) \leq -1, 2 \leq \max(a, b)$.

c) Para que la función sea creciente debe cumplirse que $a \leq -1, 2 \leq b$.
Y $f(x)$ puede ser discontinua y, sin embargo ser creciente.
Ejemplo: si $a = -2, b = 3$, la función no es continua.
Sin embargo, la función sí es creciente, pues $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
La gráfica de f será, aproximadamente, así:



(5) **Dada la función $h(x) = xe^{-x}$, se pide:**

(a) Representar aproximadamente el conjunto $A = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2, h(x) \leq y \leq 3 - x)\}$ y hallar, si existen, los maximales y minimales, máximo y mínimo de A.

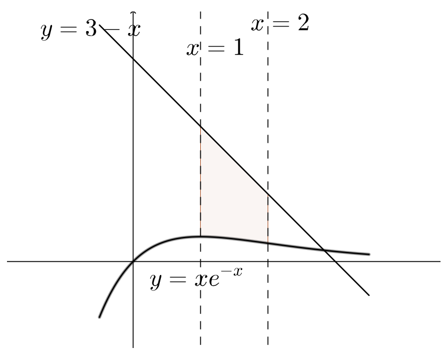
(b) Calcular el área del conjunto dado.

Sugerencia para a: el orden de Pareto viene dado por: $(x_0, y_0) \leq_P (x_1, y_1) \Longleftrightarrow x_0 \leq x_1, y_0 \leq y_1$.

0,6 puntos apartado a); 0,4 puntos apartado b)

---

a) Como $h'(x) = e^{-x}(1 - x) < 0$ cuando $1 < x < 2$ y continua, eso significa que la función es decreciente en el intervalo $[1, 2]$.
Asimismo, la recta $3 - x$ también es decreciente.
Del hecho de ser ambas funciones decrecientes y de que
$\max h(x) = h(1) = \frac{1}{\mathrm{e}} < 3 - 2 = \min(3 - x)$
se deduce que $h(x) < 3 - x$, para todo $x\epsilon[1, 2]$.
Por lo tanto, el dibujo de A será, aproximadamente, así:



Por lo tanto, el orden de Pareto nos da la siguiente información del conjunto:
máximo no existe, maximales$(A) = \{(x, 3 - x)) : 1 \leq x \leq 2\}$.
mínimo no existe, minimales$(A) = \{(x, xe^{-x}) : 1 \leq x \leq 2\}$.

b) En primer lugar, hallamos la primitiva de la función f integrando por partes:
$\int xe^{-x} = \int fg' = fg - \int f\,'g = x(-e^{-x}) - \int 1(-e^{-x}) = x(-e^{-x}) + \int e^{-x} = (x + 1)(-e^{-x})$
Por tanto, aplicando la regla de Barrow, y teniendo en cuenta que $h(x) < 3 - x$,
obtenemos que: Área (A)=
$= \int_1^2 (3 - x - h(x))dx = [3x - \frac{1}{2}x^2 + (x + 1)(e^{-x})]_1^2 = \frac{3}{2} + 3\mathrm{e}^{-2} - 2\mathrm{e}^{-1}$

(6) **Dada la función** $F(x)=\int_1^x \frac{1}{1+t^4}dt$**, se pide:**

(a) Hallar el polinomio de Taylor de orden 2, centrado en $a=1$, correspondiente a $F(x)$.

(b) Probar que $F(x)<\frac{1}{3}$ si $x>1$. Discutir si $F(x)$ es monótona y si tiene asíntota en ∞. Deducir de lo anterior la gráfica aproximada de $F(x)$.

Sugerencia para a: no intentar calcular $F(x)$ de forma explícita.

Sugerencia para b: encontrar $g(x)$ de forma que $\frac{1}{1+x^4}<g(x)$, si $x\geqslant 1$.

0,4 puntos apartado a); 0,6 puntos apartado b)

---

a) $F(1)=0$, obviamente.

$F'(x)=\dfrac{1}{1+x^4}$. Luego $F'(1)=\frac{1}{2}$.

$F"(x)=\dfrac{-4x^3}{(1+x^4)^2}$. Luego $F"(1)=-1$.

Por tanto, el polinomio de Taylor de orden 2, centrado en $a=1$, correspondiente a $F(x)$ será: $P(x)=\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2$.

.

b) Como $\dfrac{1}{1+t^4}<\dfrac{1}{t^4}$, se deduce que

$F(x)=\int_1^x \dfrac{1}{1+t^4}dt<\int_1^x \dfrac{1}{t^4}dt=[\dfrac{-t^{-3}}{3}]_1^x=\dfrac{-x^{-3}}{3}+\dfrac{1}{3}$.

Luego de ahí se sigue que $F(x)<\dfrac{1}{3}$.

Obviamente, $F(x)$ es creciente, pues su derivada es positiva. Luego $F(x)$, al ser creciente y acotada por $\dfrac{1}{3}$, tiene asíntota horizontal $y=H$, donde $0<H\leq\dfrac{1}{3}$.

Por lo tanto, la gráfica de $F(x)$ será, aproximadamente, así: