Universidad Carlos III de Madrid

| Ejercicio | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Puntos | | | | | | | |

**Departamento de Economía** **Examen Final de Matemáticas I** **19 de Junio de 2018**

**Duración del Examen: 2 horas.**

| | | |
|---|---|---|
| **APELLIDOS:** | | **NOMBRE:** |
| **DNI:** | **Titulación:** | **Grupo:** |

(1) **Sea la función** $f(x) = \dfrac{x^2}{x^4+1}$**. Se pide:**

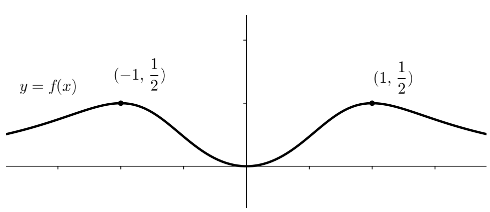
(a) Representa la gráfica de $f(x)$ hallando previamente simetrías, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos locales y/o globales e imagen de $f(x)$.

(b) Considera la función $f(x)$ restringida al intervalo $[0,1]$. Dibuja la gráfica de $f^{-1}(x)$, hallando previamente el dominio, la imagen y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f^{-1}(x)$.
Sugerencia para b: no intentar hallar la expresión analítica de $f^{-1}(x)$.

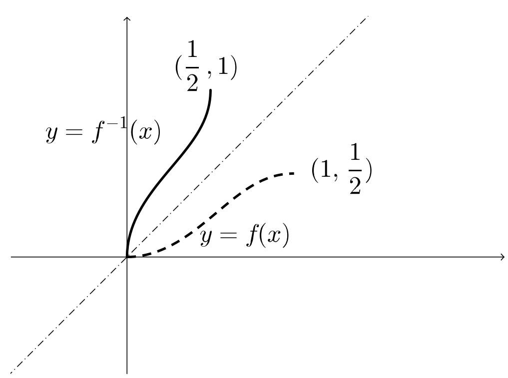
**0,6 puntos apartado a); 0,4 puntos apartado b).**

---

a) El dominio es toda la recta real. La función presenta una simetría par, luego solo hay que estudiar el intervalo $[0,\infty)$.
Hay asíntota horizontal en $\infty$, pues $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{x^2}{x^4+1} = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f(x) = 0$.
En cuanto a la monotonía de la función, la derivamos y obtenemos que:
$f\,'(x) = \dfrac{2x(x^4+1)-x^2 4x^3}{(x^4+1)^2} = \dfrac{2x-2x^5}{(x^4+1)^2} = \dfrac{2x(1-x^4)}{(x^4+1)^2}$, de lo que se deduce que:
$f$ es creciente en $(-\infty,-1]$ y en $[0,1]$, pues $f\,'(x)>0$ en $(-\infty,-1)$ y en $(0,1)$.
$f$ es decreciente en $[-1,0]$ y en $[1,\infty)$, pues $f\,'(x)<0$ en $(-1,0)$ y en $(1,\infty)$.
Luego $f$ alcanza un máximo local en $x=-1$ y en $x=1$, y un mínimo local en $x=0$.
Además, teniendo en cuenta la simetría, dichos maximizadores locales serán globales.
Y, como $f(x)>0$ si $x\neq 0$, $x=0$ es también un minimizador global.
Por lo tanto, la imagen de $f$ será $[f(0), f(1)] = [0,\frac{1}{2}]$.
En definitiva, la gráfica de la función $f(x)$ será, aproximadamente, como la figura A:




(A)




(B)

b) Partimos de la función $f(x)$, continua y creciente en $[0,1]$ y con imagen $[0,\frac{1}{2}]$.
Por lo tanto, su función inversa es continua y creciente y tendría como dominio el intervalo $[0,\frac{1}{2}]$ y su imagen sería el intervalo $[0,1]$.
Así pues, la gráfica de la función $f^{-1}(x)$ será como la figura B.

(2) **Sea $y = f(x)$ la función definida de forma implícita cerca del punto $(0,1)$ a partir de la ecuación: $y^2 - 3xy + x = 1$. Se pide:**

(a) Hallar las derivadas primera y segunda de la función $f$ en el punto $x = 0, y = 1$.

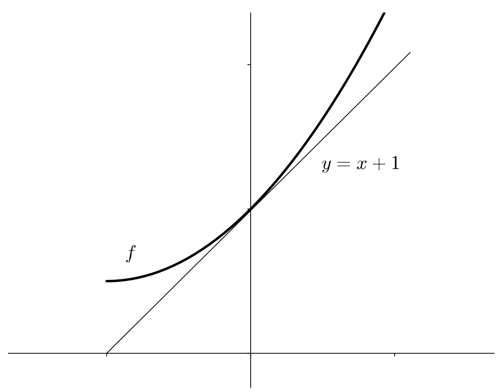
(b) Hallar la recta tangente y el polinomio de Taylor de orden 2 de la función $f$ en el punto $(0,1)$. Representar la gráfica de dicha función cerca de ese punto.

**0,4 puntos apartado a; 0,6 puntos apartado b**

---

a) En primer lugar, derivamos la ecuación:
$2yy' - 3y - 3xy' + 1 = 0$.
Sustituyendo en dicha ecuación $x = 0, y = 1$ se obtiene:
$2y' - 3 + 1 = 0 \Longrightarrow y' = 1$.
Derivando de nuevo la ecuación sin hacer las sustituciones:
$2(y')^2 + 2yy" - 3y' - 3y' - 3xy" = 0$.
Sustituyendo en dicha ecuación $x = 0, y = 1, y' = 1$ se obtiene:
$2 + 2y" - 6 = 0 \Longrightarrow 2y" = 4 \Longrightarrow y" = 2$.

b) La recta tangente tendrá como ecuación:
$y = 1 + x$.
El polinomio de Taylor de orden 2 tendrá como ecuación:
$y = 1 + x + \frac{1}{2}2x^2 = 1 + x + x^2$
Por tanto, la función implícita será creciente y convexa cerca del punto $x = 0$, y su gráfica será, aproximadamente, así:



(3) **Sea $C'(x) = 0,2x + 3$ y $I'(x) = -0,05x + 103$ las funciones de costes e ingresos marginales de una empresa monopolista, siendo $x \geqslant 0$ el número de unidades producidas de cierta mercancía. Se pide:**

(a) Determinar la producción que maximiza el beneficio. Para este nivel de producción, ¿cual será el ahorro de costes (aproximado) de producir una unidad menos?

(b) Sabiendo que el coste de producir 10 unidades es de 80 unidades monetarias, hallar la producción que minimiza el coste medio. Para este nivel de producción, ¿cual será el beneficio adicional (aproximado) de producir una unidad más?

**0,4 puntos apartado a; 0,6 puntos apartado b**

---

a) Si calculamos la primera y segunda derivada de $B$ :
$B'(x) = I'(x) - C'(x) = -0,05x + 103 - (0,2x + 3) = -0,25x + 100; B"(x) = -0,25 < 0$
luego vemos que $B$ tiene un único punto crítico en $x = 400$ y, como $B$ es una función cóncava, este punto crítico es el único maximizador global.
A este nivel de producción el ahorro de costes (aproximado) de producir una unidad menos sería, aproximadamente, 83, pues
$C(400) - C(399) \approx C'(400) = 83.$
.

b) La función de costes es $C(x) = 0,1x^2 + 3x + C_0$.
Como $C(10) = 0,1 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + C_0 = 80 \Longrightarrow C_0 = 40$,
luego la función de coste medio es $C_m(x) = \dfrac{C(x)}{x} = \dfrac{40}{x} + 3 + 0,1x.$
Si calculamos su dos primeras derivadas:
$C'_m(x) = \dfrac{-40}{x^2} + 0,1; C"_m(x) = \dfrac{80}{x^3} > 0$
observamos que $x = \sqrt{\dfrac{40}{0,1}} = 20$ es el único punto crítico y, como $C_m(x)$ es una función convexa, dicho punto crítico es el único minimizador global.
Por lo tanto, la producción que minimiza el coste medio será: $x = 20$.
Para este nivel de producción, el beneficio adicional de producir una unidad más sería, aproximadamente, 95, pues:
$B(21) - B(20) \approx B'(20) = -5 + 100 = 95$

(4) **Sean $a, b, c$ números reales y consideremos la siguiente función definida a trozos**

$$f(x) = \begin{cases} 2ax + b & \text{si } x < 1 \\ c & \text{si } x = 1 \\ \dfrac{10}{x} + 2\ln(\frac{1+x^2}{2}) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$ **. Se pide:**

(a) Discutir, según los valores $a, b, c$ la continuidad de la función anterior en toda la recta real.

(b) Discutir, según los valores $a, b, c$ la derivabilidad de la función anterior en toda la recta real.

**1 punto**

---

a) Para cualquiera valor de $a, b, c$ la función es continua si $x \neq 1$.

En $x = 1$, la función es continua por la derecha si se cumple que:

$\lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Longleftrightarrow 10 = c$

Además, en $x = 1$, la función es continua por la izquierda si se cumple que:

$\lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Longleftrightarrow 2a + b = 10.$

Luego se cumple que $f(x)$ es continua en todo $x$ cuando $2a + b = 10 = c$.

b) Desde luego, cuando $x \neq 1$ la función anterior es derivable para cualquer $a, b, c$.

En cuanto al punto $x = 1$, vamos a calcular las derivadas laterales, utilizando que la función es continua en dicho punto cuando $2a + b = 10 = c$.

$f'_-(1) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} f\,'(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} 2a = 2a$

$f'_+(1) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} f\,'(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} (\dfrac{-10}{x^2} + \dfrac{4x}{1 + x^2}) = -10 + 2 = -8.$

Luego la función será derivable cuando sea continua y, además, $a = -4$.

En otras palabras, sustituyendo $a = -4$ en la ecuación $2a + b = 10 \Longrightarrow b = 18$.

Es decir, la función será derivable en todo punto cuando $a = -4, b = 18, c = 10$.

(5) **Se considera el conjunto $A$ limitado por la gráfica de la función $g(x) = 10 - \dfrac{6}{3-x}$ y el segmento que une los puntos $(4, 16)$ y $(6, 12)$. Se pide:**

(a) Representar el conjunto $A$.Hallar los maximales y minimales de $A$.

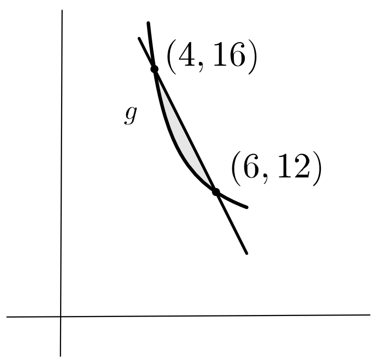
(b) Calcular su área.

Sugerencia para a: estudiar la monotonía de la función $g(x)$, así como su concavidad o convexidad. Asimismo, el orden de Pareto viene dado por: $(x_0, y_0) \leq_P (x_1, y_1) \Longleftrightarrow x_0 \leq x_1, y_0 \leq y_1$.

**0,6 puntos apartado a; 0,4 puntos apartado b**

---

a) La función $g(x) = 10 - \dfrac{6}{3-x}$ es decreciente y convexa en el intervalo $[4, 6]$, pues $g'(x) = -6(3 - x)^{-2} < 0, g''(x) = -12(3-x)^{-3} > 0$ en dicho intervalo.
Al ser la función $g(x)$ convexa, el segmento que une los puntos de la gráfica $(4, g(4))$ y $(6, g(6))$ quedará encima de la gráfica de $g(x)$.
Por lo tanto, el conjunto $A$ tendrá una forma, aproximadamente, así:




La ecuación del segmento, teniendo en cuenta que pasa por el punto $(4, 16)$ y tiene pendiente $-2$ será, por tanto, $y = 16 - 2(x - 4)$.
Por lo tanto, del dibujo se deduce que
$\{\text{maximales}(A)\} = \{(x, y) : 4 \leq x \leq 6, y = 16 - 2(x - 4)\}$.
$\{\text{minimales}(A)\} = \{(x, y) : 4 \leq x \leq 6, y = 10 - \dfrac{6}{3-x}\}$.

b) El área solicitada es la que queda debajo del segmento y encima de la hipérbola.
El área pedida es, por tanto: $\int_4^6 [(16 - 2(x-4)) - (10 - \frac{6}{3-x})]dx =$
$= \int_4^6 (14 - 2x + \frac{6}{3-x})dx = \int_4^6 (14 - 2x - \frac{6}{x-3})dx$.
Por tanto, aplicando la regla de Barrow, se obtiene que el área pedida es:
$\int_4^6 (14 - 2x - \frac{6}{x-3})dx = [14x - x^2 - 6\ln(x-3)]_4^6 =$
$= 84 - 36 - 6\ln 3 - (56 - 16 + 0) = 8 - 6\ln 3$ unidades de área.

(6) **Dada la función** $f(x) = \dfrac{3-x}{1+x^4}$**, definida en** $[0,\infty)$**, se pide:**

(a) Probar que $\displaystyle\int_0^3 f(t)dt$ está comprendido entre $1+\frac{1}{17}$ y $4+\frac{1}{17}$.

(b) Representar la función $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$. Para ello, se pide determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $F(x)$, así como su maximizador global, si existe.

Sugerencia para a: dibujar $f$ en el intervalo $[0,3]$ y considerar los valores $f(0), f(1), f(2)$ y $f(3)$.

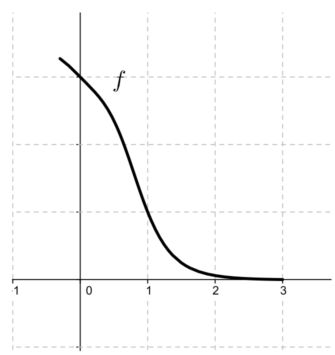
Sugerencia para a y b: no intentar hallar explícitamente $F(x)$.

**0,6 puntos apartado a; 0,4 puntos apartado b**

---

a) Obviamente $f(x)$ es una función decreciente en el intervalo $[0,3]$. Una forma de verlo es observando que es el cociente de dos funciones positivas, el numerador decreciente y el denominador creciente. Otra forma es mediante la derivada: $f\,'(x) = \dfrac{(-1)(1+x^4)-4x^3(3-x)}{(1+x^4)^2} = \dfrac{3x^4-12x^3-1}{(1+x^4)^2} = \dfrac{3x^3(x-4)-1}{(1+x^4)^2} < 0$

Por tanto, la gráfica de $f$ será, aproximadamente, así:




Luego, al ser $f$ decreciente, obtenemos que:

$f(1) < \displaystyle\int_0^1 f(t)dt < f(0), f(2) < \int_1^2 f(t)dt < f(1), f(3) < \int_2^3 f(t)dt < f(2).$

Sumando estas desigualdades, obtenemos que:

$f(1)+f(2)+f(3) < \displaystyle\int_0^3 f(t)dt < f(0)+f(1)+f(2)$. Es decir, $1+\frac{1}{17} < \displaystyle\int_0^3 f(t)dt < 4+\dfrac{1}{17}$

b) $F'(x) = f(x)$, que es una función positiva en $[0,3)$ y negativa en $(3,\infty)$. Luego $F(x)$ es una función creciente en $[0,3]$ y decreciente en $[3,\infty)$. Por lo tanto, la función $F(x)$ alcanza su máximo global en el punto $x=3$. Así pues, la gráfica de $F(x)$ será, aproximadamente, así: