Universidad Carlos III de Madrid

Ejercicio	1	2	3	4	5	6	Total
Puntos							

Departamento de Economía **Examen Final de Matemáticas I** **25 de Junio de 2015**

Duración del Examen: 2 horas.

APELLIDOS: **NOMBRE:**

DNI: **Titulación:** **Grupo:**

(1) **Sea la función $f(x) = x \ln x$. Se pide:**

(a) Representa la gráfica de $f(x)$ hallando previamente el dominio, las asíntotas, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y la imagen de $f(x)$.

(b) Considera la función $f(x)$ restringida al intervalo $[1/e, \infty)$. Dibuja la gráfica de $f^{-1}(x)$, hallando previamente el dominio, la imagen, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los puntos de corte con los ejes y los puntos fijos de $f^{-1}(x)$. Sugerencia 1: no intentar hallar la expresión analítica de $f^{-1}(x)$. Sugerencia 2: los puntos fijos de una función y su inversa son los mismos.

1 punto

---

a) El dominio es el intervalo $(0, \infty)$. No hay asíntotas verticales, pues solo cabría esa posibilidad en $x = 0$, y en ese punto sucede lo siguiente:

$\lim\limits_{x \longrightarrow 0+} f(x) = 0.(-\infty) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0+} \dfrac{\ln x}{1/x} = \frac{\infty}{\infty} =$ aplicando L'Hopital $=$

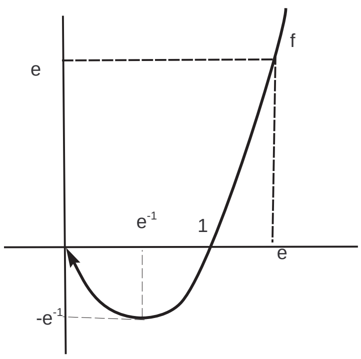
$= \lim\limits_{x \longrightarrow 0+} \dfrac{1/x}{-1/x^2} = \lim\limits_{x \longrightarrow 0+} (-x) = 0$

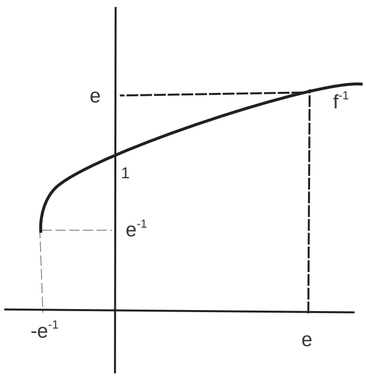
Por otra parte, no hay asíntota ni oblícua ni horizontal en ∞, pues $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \infty$.

Por otro lado, como $f'(x) = 1 + \ln x$, y $1 + \ln x = 0 \Longleftrightarrow \ln x = -1 \Longleftrightarrow x = e^{-1} = 1/e$ se deduce que f es decreciente en el intervalo $(0, 1/e]$ y creciente en $[1/e, \infty)$, pues f' es creciente en $(0, \infty)$, luego f' es negativa en el intervalo $(0, 1/e)$ y positiva en $(1/e, \infty)$.

Por último, como $f(1/e) = (1/e)\ln(1/e) = -1/e$, $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \longrightarrow 0+} f(x) = 0$ y la función es continua en $(0, \infty)$ y monótona en los intervalos que se citaron, la imagen es $[-1/e, \infty)$.

Así pues, la gráfica de la función $f(x)$ será como en primera figura:





b) Partimos de la función $f(x)$, continua y creciente en $[1/e, \infty)$ y con imagen $[-1/e, \infty)$. Por lo tanto, la función inversa sería creciente y tendría como dominio el intervalo $[-1/e, \infty)$ y su imagen sería el intervalo $[1/e, \infty)$.

Como el único punto de corte con los ejes de la función restringida sería el $(1, 0)$, pues $f(1) = 0$, el único punto de corte de la función inversa sería el $(0, 1)$, pues $f^{-1}(0) = 1$.

Por último, el único punto fijo de f es $x = e$, pues $f(x) = x \Longleftrightarrow \ln x = 1 \Longleftrightarrow x = e$. Así pues, la gráfica de la función $f^{-1}(x)$ será, aproximadamente como en la segunda figura.

(2) **Sea $y = f(x)$ la función definida de forma implícita cerca del punto $(1,0)$ a partir de la ecuación: $axy + 2 = 2xe^y + x^2y$, donde $a \neq 3$. Se pide:**

(a) Hallar, en función del parámetro a, la derivada de la función f en el punto $(1,0)$. ¿Para qué valores de a la función es creciente o decreciente cerca de $x = 1$?

(b) Hallar, en función del parámetro a, la recta tangente a la función f en el punto $(1,0)$. Discutir, según los valores de a, cuando dicha recta es paralela o perpendicular a la diagonal principal $y = x$.

1 punto

---

a) En primer lugar, derivamos la ecuación:
$ay + axy' = 2e^y + 2xy'e^y + 2xy + x^2y'$
Sustituyendo en dicha ecuación $x = 1, y = 0$ se obtiene:
$ay' = 2 + 2y' + y' \iff (a-3)y' = 2 \iff y' = 2/(a-3)$.
Por lo tanto, la función será creciente cerca de $x = 1$ cuando $a > 3$ y decreciente cerca del mismo punto cuando $a < 3$.

b) La recta tangente tendrá como ecuación:
$y - 0 = (2/(a-3))(x-1)$
Por tanto, dicha recta será paralela a la diagonal principal si $\frac{2}{a-3} = 1 \iff a = 5$
Análogamente, dicha recta será perpendicular a la diagonal principal si $\frac{2}{a-3} = -1 \iff a = 1$

(3) **Sea** $C(x) = 2x^2 - 3x + C_0$ **la función de costes y** $p(x) = 197 - 2x$ **la función (inversa) de demanda de una compañía monopolista que produce al menos dos unidades. Se pide:**

(a) Hallar la producción x_0 que maximiza el beneficio de dicha compañía.

(b) Supongamos que $x_1 = 2x_0$ es la producción que minimiza el coste medio de dicha compañía. Hallar C_0.

Observación: justificar las respuestas.

1 punto

---

a) Como la función de beneficios es
$B(x) = I(x) - C(x) = 197x - 2x^2 - (2x^2 - 3x + C_0) = -4x^2 + 200x - C_0$
el punto crítico x_0 de dicha función de beneficios será:
$B'(x_0) = -8x_0 + 200 = 0 \Longleftrightarrow x_0 = 25$.
Y, observando que la función de beneficios es cóncava, pues $B''(x) < 0$,
el punto crítico será el único maximizador global de los beneficios.

b) En primer lugar, como $\dfrac{C(x)}{x} = \dfrac{C_0}{x} - 3 + 2x$. Derivando esta función, obtenemos:
$(\dfrac{C(x)}{x})' = -\dfrac{C_0}{x^2} + 2$
Como $x_1 = 2x_0 = 50$ ha de ser un punto crítico de la función de costes medios:
$-\dfrac{C_0}{50^2} + 2 = 0 \Longleftrightarrow C_0 = 2.50^2 = 5.000$.
Observando que la función de costes medios es convexa, pues $(\dfrac{C(x)}{x})'' > 0$,
el punto crítico será el único minimizador global de los costes medios.

(4) **Sean a, b números reales y consideremos la siguiente función definida a trozos**

$$f(x) = \begin{cases} e^{a+x} & \text{si } x < -3 \\ 1 & \text{si } x = -3 \\ \sqrt{x+b} & \text{si } x > -3 \end{cases}$$ **. Se pide:**

(a) Discutir, según los valores a, b, cuando la función anterior es continua.

(b) Discutir, según los valores a, b, cuando la función anterior es derivable.

1 punto

---

a) Para cualquier valor a, la función es continua en $x < -3$.

Además, en $x = -3$, la función es continua por la izquierda si se cumple que:

$\lim\limits_{x \longrightarrow -3^-} f(x) = f(-3) \Longleftrightarrow e^{a-3} = 1 \Longleftrightarrow a = 3.$

Por otro lado, la función es continua si $x > -3$ cuando $b \geqslant 3$.

Y, en particular, f es continua en $x = -3$ por la derecha si se cumple que.

$\lim\limits_{x \longrightarrow -3^+} f(x) = f(-3) \Longleftrightarrow \sqrt{b-3} = 1 \Longleftrightarrow b = 4.$

Luego se cumple que $f(x)$ es continua en todo x cuando $a = 3, b = 4$.

Por último, en los demás puntos del dominio la función es continua.

b) Desde luego, cuando $x \neq -3$ la función anterior es derivable si $b \geqslant 3$ pues, en un entorno de dicho punto la función coincide con una exponencial o una raíz cuadrada.

En cuanto al punto $x = -3$, vamos a calcular las derivadas laterales, utilizando que la función es continua en dicho punto cuando $a = 3, b = 4$.

$f'_-(-3) = \lim\limits_{x \longrightarrow -3^-} f'(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -3^-} e^{x+3} = e^0 = 1$

$f'_+(-3) = \lim\limits_{x \longrightarrow -3^+} f'(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -3^+} \dfrac{1}{2\sqrt{x+4}} = \frac{1}{2}.$

Luego la función no será derivable nunca en $x = -3$.

(5) **Se considera el conjunto A limitado por las gráficas de las funciones $y = \ln(x+4), y = -e^x$ y las rectas $x = 0$, $x = 2$. Se pide:**

(a) Representar el conjunto A y hallar los maximales y minimales, máximo y mínimo de A, si existen.

(b) Calcular el área del recinto anterior.

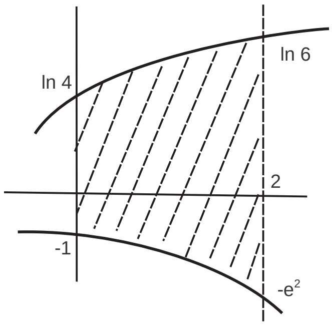
Sugerencia 1: el orden de Pareto viene dado por: $(x_0, y_0) \leq_P (x_1, y_1) \Longleftrightarrow x_0 \leq x_1, y_0 \leq y_1$.

Sugerencia 2: no intentar calcular exactamente los valores pedidos, basta dejarlos indicados.

1 punto

---

a) La función $f(x) = \ln(x+4)$ es positiva y creciente en el intervalo $[0, 2]$, y la función $g(x) = -e^x$ es negativa y decreciente en toda la recta real, luego el conjunto A tiene una forma, aproximadamente, así:



Obviamente, por el dibujo se deduce que

$\{\text{maximales}(A)\} = \{\text{máximo}(A)\} = \{(2, \ln 6)\}$

$\{\text{minimales}(A)\} = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, y = -e^x\}$; mínimo$(A)$ no existe.

b) El área solicitada es la que queda debajo de la función logarítmica y encima de la exponencial, limitada por las rectas verticales $x = 0, x = 2$.

El área pedida es, por tanto: $\int_0^2 (\ln(x+4) + e^x) dx$

Integrando por partes:

$\int \ln(x+4) dx = x\ln(x+4) - \int \dfrac{x}{x+4} dx = x\ln(x+4) - \int \frac{x+4-4}{x+4} dx =$

$= x\ln(x+4) - x + 4\ln(x+4) = (x+4)\ln(x+4) - x$.

Por tanto, aplicando la regla de Barrow, se obtiene que el área pedida es:

$[(x+4)\ln(x+4) - x + e^x]_0^2 = 6\ln 6 - 2 + e^2 - (4\ln 4 + 1) =$

$= 6\ln 6 + e^2 - 4\ln 4 - 3$ unidades de área.

(6) **Dada la función** $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$ **definida en en** $(1, \infty)$, **se pide:**

(a) Hallar la ecuación de la primitiva $F(x)$ de $f(x)$ que cumpla que $F(2) = \frac{8}{3}$.

(b) Probar la desigualdad $\sqrt{x+1} < \dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$ y, a partir de ahí, hallar una cota inferior para la integral $\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx$.

1 punto

---

a) Haciendo el cambio de variable $x - 1 = t^2, dx = 2tdt$, se deduce que la primitiva de f será así:
$F(x) = \int \dfrac{x}{\sqrt{x-1}} dx = \int \dfrac{1+t^2}{t} 2tdt = 2 \int (1+t^2)dt = 2(t + t^3/3) + C =$
$= 2\sqrt{x-1} + \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3} + C$
Como $\frac{8}{3} = F(2) = \frac{8}{3} + C$, se deduce que $C = 0$.
Luego $F(x) = 2\sqrt{x-1} + \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}$.

b) Pasando el denominador al primer término, la desigualdad propuesta es equivalente a:
$\sqrt{x+1}\sqrt{x-1} < x$
Elevando ambos términos al cuadrado, la desigualdad equivale a:
$(x+1)(x-1) = x^2 - 1 < x^2$
luego la desigualdad es cierta. A partir de dicha desigualdad, se deduce que:
$\int_3^8 \sqrt{x+1} dx < \int_3^8 \dfrac{x}{\sqrt{x-1}} dx$
Luego, como la primera integral vale:
$\int_3^8 \sqrt{x+1} dx = [\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}]_3^8 = \frac{2}{3}(27 - 8) = \frac{38}{3}$,
se deduce que $\frac{38}{3} < \int_3^8 \dfrac{x}{\sqrt{x-1}} dx$.