Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía **Examen Final de Matemáticas I** **17 de Junio de 2013**

Duración del Examen: 2 horas.

APELLIDOS:		**NOMBRE:**
DNI:	**Titulación:**	**Grupo:**

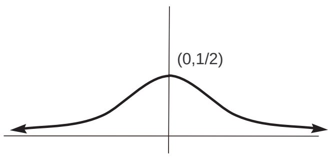
(1) **Sea la función** $f(x) = \dfrac{1}{e^x + e^{-x}}$**. Se pide:**

(a) Representa la gráfica de $f(x)$ hallando previamente el dominio, las asíntotas, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y la imagen de $f(x)$.

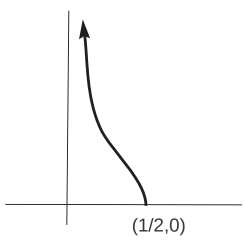
(b) Considera la función $f(x)$ restringida al intervalo $[0, \infty)$.
Dibuja la gráfica de $f^{-1}(x)$, hallando previamente el dominio, la imagen, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y las asíntotas de $f^{-1}(x)$.
Sugerencia: no intentar hallar la expresión analítica de $f^{-1}(x)$.
1 punto

---

a) El dominio es la recta real, pues el denominador de la función siempre es positivo.
No habría asíntotas verticales, pues la función siempre es continua.
Sin embargo, sí hay asíntotas horizontales, pues
$\lim\limits_{x \longrightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{1}{\infty} = 0$.
Por otro lado, como $f\,'(x) = \dfrac{-e^x + e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2}$, y la función exponencial es creciente,
se deduce que f es creciente en el intervalo $(-\infty, 0]$ y decreciente en $[0, \infty)$.
Por último, como $f(0) = \frac{1}{2}$, $\lim\limits_{x \longrightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ y la función es continua y monótona en los intervalos $(-\infty, 0]$ y $[0, \infty)$, la imagen es $(0, \frac{1}{2}]$.
Así pues, la gráfica de la función $f(x)$ será, aproximadamente, así:



b) Partimos de la función $f(x)$, continua y decreciente en $[0, \infty)$ y con imagen $(0, \frac{1}{2}]$.
Por lo tanto, la función inversa tendría como dominio el intervalo $(0, \frac{1}{2}]$ y su imagen sería el intervalo $[0, \infty)$.
La función inversa sería decreciente y tendría una asíntota vertical hacia ∞ en 0^+, por simetría respecto a la diagonal principal.
Por lo tanto, la gráfica de la función $f^{-1}(x)$ será, aproximadamente, así:



(2) **Sea** $f(x) = 8xe^{-x^2}$**. Se pide:**

(a) Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos locales y globales, así como las asíntotas.

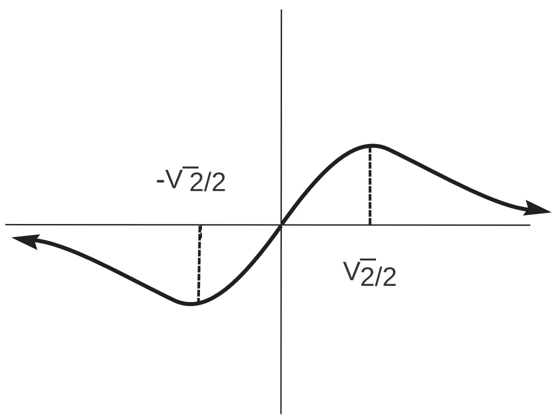
(b) Calcular los intervalos de concavidad y convexidad, puntos de inflexión, y dibujar la gráfica de $f(x)$.

1 punto

---

a) En primer lugar, derivamos la función:
$f'(x) = 8e^{-x^2} - 16x^2e^{-x^2} = 8e^{-x^2}(1 - 2x^2)$.
Por lo tanto, la función es creciente en el intervalo $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ y decreciente en los intervalos $(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}]$ y $[\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty)$.
Como la función es continua en toda la recta, no tiene ninguna asíntota vertical.
Por otro lado, como $\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow \pm\infty} \frac{8x}{e^{x^2}} = (L'Hopital) = \lim_{x \longrightarrow \pm\infty} \frac{8}{2xe^{x^2}} = 0$
La función tiene asíntota horizontal $y = 0$ en $\pm\infty$.
Por último, como $f(0) = 0$, la función alcanza un mínimo local y global en $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ y un máximo local y global en $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) A continuación, calculamos la derivada segunda de la función. Como
$f''(x) = -16xe^{-x^2}(3 - 2x^2)$
se deduce que f es convexa en los intervalos $[-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, 0]$ y $[\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \infty)$, donde f''es positiva.
Por otro lado, f es cóncava en los intervalos $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}]$ y $[0, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}]$, donde f''es negativa.
Por lo tanto, la función tiene puntos de inflexión en $x = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, 0, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.
Por lo tanto, la función tiene una gráfica, aproximadamente, así:



(3) **Sea** $B'(x) = 30 - 2x$ **la función de beneficios marginales y** $C_0 = 100$ **los costes fijos de una compañía monopolista. Se pide:**

(a) Hallar la producción x_0 que maximiza el beneficio de dicha compañía. Hallar los beneficios obtenidos y el beneficio por unidad para dicha cantidad x_0.

(b) Hallar la producción x_1 que maximiza el beneficio por unidad de dicha compañía. Hallar los beneficios obtenidos y el beneficio por unidad para dicha cantidad x_1.

Observación: justificar las respuestas.

1 punto

---

a) Como la función de beneficios es $B(x) = -x^2 + 30x - 100$, la producción x_0 que maximiza los beneficios será:

$B'(x_0) = -2x_0 + 30 = 0 \Longleftrightarrow x_0 = 15$.

Y, observando que la función de beneficios es cóncava, pues $B"(x) < 0$,

el punto crítico será el único maximizador global de los beneficios.

Para dicha producción, los beneficios serán: $B(15) = -15^2 + (30).15 - 100 = -225 + 450 - 100 = 125$

Y los beneficios medios serán: $\dfrac{B(15)}{15} = \dfrac{125}{15} = \dfrac{25}{3} \approx 8,3$

b) En primer lugar, como $\dfrac{B(x)}{x} = -x + 30 - \dfrac{100}{x}$. Derivando esta función, obtenemos:

$(\dfrac{B(x)}{x})' = -1 + \dfrac{100}{x^2} = 0 \Longleftrightarrow x^2 = 100$, luego el único punto crítico es $x_1 = 10$.

Y, observando que la función de beneficios medios es cóncava, pues $(\dfrac{B(x)}{x})" < 0$.

Por tanto, el punto crítico será el único maximizador global de los beneficios medios.

Para dicha producción, los beneficios serán: $B(10) = -10^2 + (30).10 - 100 = -100 + 300 - 100 = 100$

Y los beneficios medios serán: $\dfrac{B(10)}{10} = \dfrac{100}{10} = 10$

(4) **Sea $y = f(x)$ la función definida implícitamente, cerca del punto $x = 1, y = 0$ por la ecuación $axy - 2e^y = 2x - 4$, se pide:**

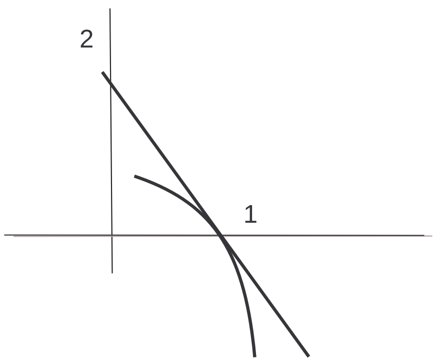
(a) Hallar a para que la pendiente de la recta tangente a la función $y = f(x)$ en el punto $(1, 0)$ sea igual a -2.

(b) Hallar $f"(1)$ y dibujar aproximadamente la gráfica de la función cerca de $x = 1, y = 0$.
Sugerencia para b): solo es necesario calcular el signo de $f"(1)$.
1 punto

---

a) Calculemos la derivada primera de esta función:
$ay + axy' - 2y'e^y = 2$;
Ahora, sustituyendo $x = 1, y = 0$ en la ecuación anterior:
$(a-2)y' = 2 \Longrightarrow y' = \dfrac{2}{a-2} = -2 \Longrightarrow a = 1$

b) Derivando la ecuación obtenida después de derivar por primera vez, se obtiene:
$2y' + xy" - 2[(y')^2 + y"]e^y = 0$
Sustituyendo $x = 1, y = 0, y' = -2$ en la ecuación anterior, se obtiene:
$-12 - y" = 0 \Longrightarrow y" = -12$, luego la función es cóncava cerca de $x = 1$.
Por lo tanto, la gráfica de la función cerca del punto $(1, 0)$ será, aproximadamente, así:



(5) **Se considera el conjunto** $A = \{(x, y) : x^2 \leq y \leq 2 - |x|\}$. **Se pide:**

(a) Representar el conjunto A y hallar los maximales y minimales, máximo y mínimo de A, si existen.

(b) Calcular el área del recinto anterior.

Sugerencia: el orden de Pareto viene dado por: $(x_0, y_0) \leq_P (x_1, y_1) \Longleftrightarrow x_0 \leq x_1, y_0 \leq y_1$.

1 punto

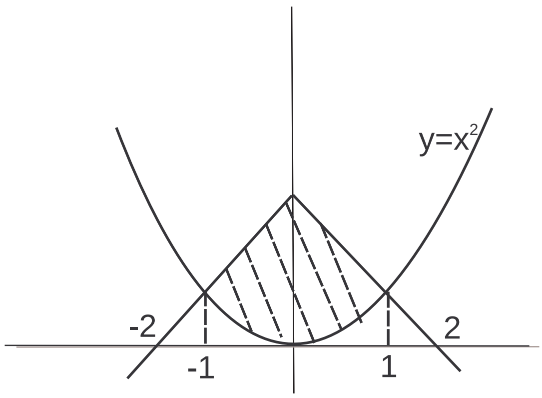
---

a) Como $2 - |x| = 2 + x$ si $x \leq 0$ y $2 - |x| = 2 - x$ si $x \geqslant 0$, obtenemos los puntos de corte de $2 - |x|$ y x^2.

$x^2 = 2 + x, x \leq 0 \Longleftrightarrow x = -1 \Longrightarrow y = 1$

$x^2 = 2 - x, x \geqslant 0 \Longleftrightarrow x = 1 \Longrightarrow y = 1$

Por lo tanto, el único recinto acotado determinado por esas funciones tiene una forma, aproximadamente, así:



Obviamente, $\{\text{maximales}(A)\} = \{(x, y) : y = 2 - x, 0 \leq x \leq 1\} \Longrightarrow$no existe el máximo.

$\{\text{minimales}(A)\} = \{(x, y) : y = x^2, -1 \leq x \leq 0\} \Longrightarrow$no existe el mínimo.

b) El área solicitada, observando la simetría respecto al eje vertical, es:

$2\int_0^1 (2 - x - x^2)dx = 2[2x - x^2 - \frac{x^3}{3}]_0^1 = \frac{7}{3}$ unidades de área.

(6) **Dada la función** $f(x) = \dfrac{8-6x}{x^2-4}$, **se pide:**

(a) Hallar la ecuación de la primitiva $F(x)$ de $f(x)$ que cumpla que $F(3) = 0$.

(b) Hallar la recta tangente a F en el punto $a = 3$, y utilizarla para obtener una aproximación del valor de $F(2'9)$.

1 punto

---

a) Como $\dfrac{8-6x}{x^2-4} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{x+2} = \dfrac{A(x+2)+B(x-2)}{(x-2)(x+2)} \Longrightarrow 8-6x = A(x+2)+B(x-2)$, se deduce que

tomando $x = -2 \Longrightarrow B = -5$; tomando $x = 2 \Longrightarrow A = -1$.

Luego $F(x) = \int f(x)dx = -\ln|x-2| - 5\ln|x+2| + C$.

Y como $F(3) = -5\ln 5 + C = 0 \Longrightarrow C = 5\ln 5$

Luego la ecuación de la primitiva es $F(x) = 5\ln 5 - \ln|x-2| - 5\ln|x+2|$.

b) La ecuación de la recta tangente a F en el punto $a = 3$ es:

$y = F(3) + F'(3)(x-3)$

Como $F(3) = 0, F'(3) = f(3) = -\frac{10}{5} = -2$, se deduce que

$y = -2(x-3)$.

Luego $F(2'9) \approx -2(2'9-3) = 0'2$