Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía **Examen Final de Matemáticas I** **20 de Junio de 2012**

Duración del Examen: 2 horas.

APELLIDOS:		**NOMBRE:**
DNI:	**Titulación:**	**Grupo:**

(1) **Sea la función** $f(x) = \ln(x^2 - 1)$**. Se pide:**

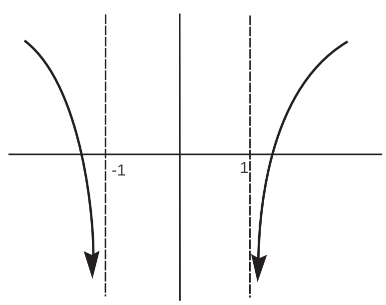
(a) Representa la gráfica de $f(x)$ hallando previamente el dominio, las asíntotas, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y la imagen de $f(x)$.

(b) Considera la función $f(x)$ restringida al intervalo $(1, \infty)$. Halla la expresión analítica de $f^{-1}(x)$ y dibuja la gráfica de $f^{-1}(x)$.

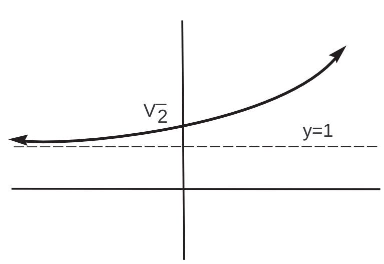
1 punto

---

a) El dominio de la función anterior consiste en los puntos en los que se cumple que $x^2 - 1 > 0$.
Es decir, Dominio $(f) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.
Asíntotas verticales en $x = -1, x = 1$, pues
$\lim\limits_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \ln(0^+) = -\infty$
Asimismo, no hay asíntotas ni horizontales ni oblicuas, pues
$\lim\limits_{x \longrightarrow \pm\infty} f(x) = \infty, \lim\limits_{x \longrightarrow \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = (L'Hopital) = \lim\limits_{x \longrightarrow \pm\infty} \dfrac{2x/(x^2-1)}{1} = 0$
Por otro lado, como $f\,'(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$, siendo $x^2 - 1 > 0$,
se deduce que f es decreciente en el intervalo $(-\infty, -1)$ y creciente en $(1, \infty)$.
Por último, como $\lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \infty$ y la función es continua en $(1, \infty)$, la imagen es $\mathbb{R}$.
Así pues, la gráfica de la función $f(x)$ será, aproximadamente, así:



b) Partimos de la ecuación $y = f(x) = \ln(x^2 - 1)$.
A continuación, observamos las equivalencias: $e^y = x^2 - 1 \iff e^y + 1 = x^2$.
Y ahora, como $x > 0$, la ecuación anterior equivale a: $x = \sqrt{e^y + 1}$.
Pues bien, la función inversa es: $y = f(x) = \sqrt{e^x + 1}$.
La gráfica de la función $f^{-1}(x)$ será, aproximadamente, así:



(2) **Sea** $f(x) = a + x + \dfrac{1}{x-2}$ **, donde** $a \geqslant 0$ **es un parámetro. Se pide:**

(a) Hallar el valor del parámetro para que $f(x_0) = 5$, siendo x_0 el punto donde la función alcanza su único máximo local o relativo.

(b) Hallar el valor del parámetro que minimiza la integral $\int_3^4 f(x)dx$.

Sugerencia: las partes a) y b) son independientes.

1 punto

---

a) En primer lugar, derivamos la función:
$f\ '(x) = 1 - (x-2)^{-2}$, $f"(x) = 2(x-2)^{-3}$.
A continuación, igualamos la derivada a 0 y obtenemos los puntos críticos:
$f\ '(x) = 0 \Longleftrightarrow 1 = (x-2)^{-2} \Longleftrightarrow x = 1, x = 3$.
Finalmente, sustituimos la derivada segunda en los puntos críticos y obtenemos que:
$f"(1) < 0 \Longrightarrow x_0 = 1$ es máximo local.
Como $f(1) = a + 1 - 1 = 5 \Longrightarrow a = 5$.

b) Como $\int_3^4 f(x)dx = \int_3^4 (a + x + (x-2)^{-1})dx = [ax + \frac{x^2}{2} + \ln(x-2)]_3^4 = a + \frac{7}{2} + \ln 2$,
dicha integral toma su valor mínimo cuando $a = 0$.

(3) **Sea $C'(x) = 30 + 8x$ la función de costes marginales y $C_0 = 100$ los costes fijos de una compañía monopolista. Se pide:**

(a) Hallar la producción x_0 que minimiza el coste medio de dicha compañía.

(b) Sabiendo que la función de demanda es $p(x) = 100 - x$, hallar el precio que maximiza el beneficio de dicha compañía.

Observación: justificar las respuestas.

1 punto

---

a) Como la función de costes es $C(x) = 4x^2 + 30x + 100$, la función de costes medios será: $\frac{C(x)}{x} = 4x + 30 + \frac{100}{x}$. Derivando esta función, obtenemos: $(\frac{C(x)}{x})' = 4 - 100/x^2$, luego el único punto crítico es $x_0 = 5$.

Y, observando que la función de costes medios es convexa, pues $(\frac{C(x)}{x})" > 0$.

Por tanto, el punto crítico será el único minimizador global de los costes medios.

b) En primer lugar, como $B(x) = (100 - x)x - (4x^2 + 30x + 100) = -5x^2 + 70x - 100$, derivando la función de beneficios e igualando a cero se obtiene que:

$B'(x) = -10x + 70 = 0 \Longleftrightarrow x = 7$ es el único punto crítico.

Y, como la función de beneficios es cóncava, pues $B"(x) = -10 < 0$, dicha producción es la que maximiza el beneficio.

Por lo tanto, el precio que maximiza el beneficio es $p(7) = 100 - 7 = 93$.

(4) **Dada la función $f(x) = xe^{1-x}$, se pide:**

(a) Calcular los intervalos de concavidad y convexidad, así como los puntos de inflexión de $f(x)$.

(b) Hallar la recta tangente y el polinomio de Taylor de orden 2 correspondientes a un punto de inflexión, y representar la gráfica cerca de ese punto.

1 punto

---

a) Calculemos las derivadas primera y segunda de esta función.

$f'(x) = e^{1-x} - xe^{1-x} = (1-x)e^{1-x}$;

$f''(x) = -e^{1-x} - (1-x)e^{1-x} = (x-2)e^{1-x}$

Luego f es cóncava si $x < 2$, puesto que $f''(x) < 0$

Luego f es convexa si $x > 2$, puesto que $f''(x) > 0$

Y, por tanto, $x = 2$ es el único punto de inflexión.

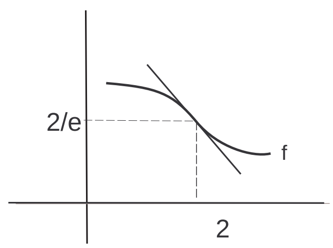
b) La ecuación de la recta tangente correspondiente al punto $x_0 = 2$ es:

$y - f(2) = f'(2)(x-2)$; y, como $f(2) = \frac{2}{e}$, $f'(2) = \frac{-1}{e}$, la ecuación de la recta tangente resulta ser:

$y - \frac{2}{e} = -\frac{1}{e}(x-2)$.

Finalmente, como la derivada segunda de la función es cero en el punto $x_0 = 2$,
la ecuación de la recta tangente es la misma que la del polinomio de Taylor de orden 2 en dicho punto.

La gráfica de la función, por tanto, cerca del punto $(2, \frac{2}{e})$ será, aproximadamente, así:



(5) **Sea A el conjunto acotado comprendido entre la curva $y = xe^{2x}$ y las rectas $y = x, x = 2$. Se pide:**

(a) Representar el conjunto A y hallar los maximales y minimales, máximo y mínimo de A, si existen.

(b) Calcular el área del recinto anterior.

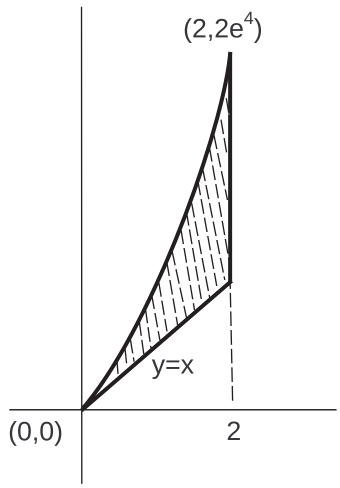
Sugerencia: el orden de Pareto viene dado por: $(x_0, y_0) \leq_P (x_1, y_1) \Longleftrightarrow x_0 \leq x_1, y_0 \leq y_1$.

1 punto

---

a) Como $e^{2x} > 1$ si $x > 0$ y $e^{2x} < 1$ si $x < 0$, obtenemos que $xe^{2x} > x$ si $x \neq 0$.

Por lo tanto, el único recinto acotado determinado por esas funciones está contenido en el primer cuadrante y tiene una forma así:



Obviamente, $máximo(A) = \{\text{maximales}(A)\} = \{(2, 2e^4)\}$.

$Mínimo(A) = \{\text{minimales}(A)\} = \{(0, 0)\}$.

b) El área solicitada es:

$\int_0^2 (xe^{2x} - x)dx;$

Para hallar la integral anterior, debemos calcular la primitiva de la función xe^{2x} por partes:

$\int xe^{2x} = x\frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2} = x\frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4}$

Luego el área total es $\int_0^2 (xe^{2x} - x)dx = [x\frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} - \frac{x^2}{2}]_0^2 = 2\frac{e^4}{2} - \frac{e^4}{4} - \frac{2^2}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3e^4}{4} - \frac{7}{4}$

(6) **Dada la función** $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$**, se pide:**

(a) Hallar la primitiva $F(x)$ de $f(x)$ que cumpla que $F(0) = 3$. Hallar también los intervalos en los cuales F es creciente, decreciente y los máximos y mínimos de F.

(b) Hallar el polinomio de Taylor de segundo orden de F centrado en $a = 0$, y utilizarlo para obtener una aproximación del valor de $F(0,1)$.

Sugerencia: para el apartado b) quizás no sea necesario hallar la función $F(x)$.

1 punto

---

a) La primitiva es inmediata: $F(x) = \frac{1}{2}\ln^2(1+x) + C$. Y como se debe cumplir que
$F(0) = 3 \Longrightarrow F(x) = \frac{1}{2}\ln^2(1+x) + 3$ Así pues, tenemos que:
i) $F(x)$ is decreciente en $(-1, 0)$, pues en ese intervalo $F'(x) = f(x) < 0$.
ii) $F(x)$ es creciente en $(0, \infty)$, pues en ese intervalo $F'(x) = f(x) > 0$.
De ahí se deduce que $F(x)$ alcanza un mínimo global en $x = 0$.

b) La ecuación del polinomio de Taylor de F centrado en $a = 0$ es:
$P(x) = F(0) + F'(0)x + \frac{1}{2}F"(0)x^2$
En primer lugar, hallemos $F"(x) = f\,'(x) = \dfrac{1 - \ln(1+x)}{(1+x)^2}$
Como $F(0) = 3, F'(0) = f(0) = 0, 1F"(0) = 1$, ºse deduce que
$P(x) = 3 + \frac{1}{2}x^2$.
Luego $F(0,1) \approx P(0,1) = 3 + \frac{1}{2}0,01 = 3,005$