Universidad Carlos III de Madrid

Ejercicio	1	2	3	4	5	6	total
Puntos							

Departamento de Economía **Examen Final de Matemáticas I** **28 de Junio de 2010**

Duración del Examen: 2 horas.

APELLIDOS:		**NOMBRE:**
DNI:	**Titulación:**	**Grupo:**

1. **Sea la función** $g(x) = |x-1| - 1$**. Se pide:**
   a) Hallar el dominio, la imagen (o recorrido) y los intervalos de crecimiento/decrecimiento de g.
   b) Considera h la función anterior, restringida al intervalo $(-\infty, 1]$.
   Hallar la inversa de h, así como el dominio e imagen de dicha función inversa.
   Sugerencia: considerar previamente la función $f(x) = |x|$ y, a partir de ella, representar $g(x), h(x)$ y $h^{-1}(x)$.
   1 punto

---

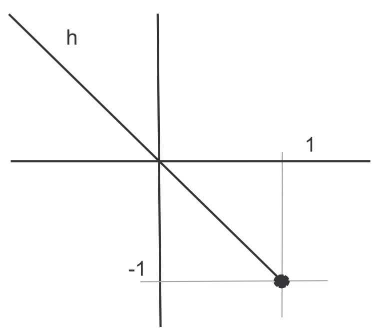
a) La función $g(x)$ puede ser definida a trozos así:

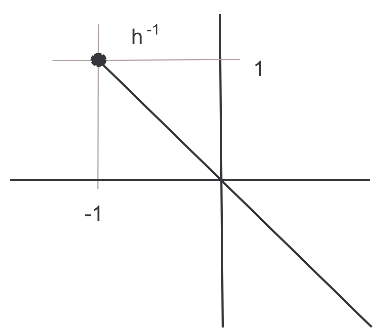
$$g(x) = \begin{cases} -(x-1)-1 = -x & si\ x \leq 1 \\ (x-1)-1 = x-2 & si\ \ x \geq 1 \end{cases}$$

; Por lo tanto, la función tiene como dominio toda la recta real, es decreciente en el intervalo $(-\infty, 1]$ y creciente en el intervalo $[1, \infty)$ y, como cumple $g(1) = -1$ y tiene límite ∞ (resp. $-\infty$) en ∞ (resp. $-\infty$), su imagen es el intervalo $[-1, \infty)$.

b) Evidentemente, como $g : (-\infty, 1] \to [-1, \infty)$ es biyectiva, se deduce que $g^{-1}(x) = -x$, su dominio es $[-1, \infty)$ y su imagen es $(-\infty, 1]$.

Las gráficas de g y de g^{-1} son, aproximadamente, así:





2. Sea a un número real y consideremos la siguiente función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+x^2} & \text{si } x < 0 \\ a & \text{si } x = 0 \\ \ln(x^2+1) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a) Estudiar, según los valores de a, la derivabilidad de $f(x)$ en el punto $x = 0$.

b) Estudiar la existencia de asíntotas de la función $f(x)$.

1 punto

---

a) En primer lugar, estudiamos si la función es continua en el punto $x = 0$.

Para ello, observamos que

$\lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = 0$, $f(0) = a$, $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = 0$, es decir, f continua en $x = 0$ cuando $a = 0$.

Y ahora, suponiendo que $f(x)$ es continua en $x = 0$, $f(x)$ es derivable en $x = 0$ cuando

$\lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} f\,'(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f\,'(x)$, es decir, como

$\lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} f\,'(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} \dfrac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = 1$; y

$\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f\,'(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \dfrac{2x}{x^2+1} = 0$;

se deduce que f no es derivable en $x = 0$, para ningún a.

b) Como la función es continua en todos los puntos, no tiene ninguna asíntota vertical.

En cuanto a posibles asíntotas en $-\infty$, se deduce que, como

$\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \dfrac{x}{1+x^2} = 0$,

luego $f(x)$ tiene una asíntota horizontal (y, por tanto, no oblicua) en ∞.

Y, en cuanto a posibles asíntotas en ∞, se deduce que, como

$\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \ln(x^2+1) = \infty$; y

$\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{\ln(x^2+1)}{x} = \frac{\infty}{\infty}$ =(L'Hopital)= $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{2x}{x^2+1} = 0$

luego $f(x)$ no tiene ni asíntota horizontal ni oblicua en ∞.

3. Sea $f(x) = 2ae^x - e^{2ax}$ **, donde** $0 \neq a \neq \frac{1}{2}$**. Se pide:**

a) Calcular el polinomio de Taylor de orden 2 en el punto $x_0 = 0$.

b) Determinar para que valores de a podemos asegurar que la función f alcance un máximo o un mínimo local en el punto $x_0 = 0$.

1 punto

---

a) Como $f(x) = 2ae^x - e^{2ax}, f(0) = 2a - 1$.

Como $f\ '(x) = 2ae^x - 2ae^{2ax},\ f\ '(0) = 0$

Como $f\ ''(x) = 2ae^{ax} - 4a^2e^{2ax}, f''(0) = 2a - 4a^2$.

Luego el polinomio de Taylor de orden 2 en el punto $x_0 = 0$ es $P_2(x) = \frac{1}{2}(2a - 4a^2)x^2 + 2a - 1$.

b) La función alcanza un mínimo local en el punto $x_0 = 0$ cuando $a(1 - 2a) > 0$ o, equivalentemente, cuando $0 < a < \frac{1}{2}$.

Análogamente, la función alcanza un máximo local en el punto $x_0 = 0$ cuando $a(1 - 2a) < 0$ o, equivalentemente, cuando $a < 0$ o cuando $a > \frac{1}{2}$.

4. Sean $C(x) = C_0+x+0,01x^2$ y $p\left(x\right) = a-\dfrac{x}{50}$ las funciones de coste y demanda, respectivamente, de una empresa monopolista. Se pide:

a) Hallar a y C_0 para que la producción $x = 100$ minimice el coste medio.

b) Hallar a y C_0 para que la producción $x = 100$ maximice el beneficio.

1 punto

---

a) Como la función de costes medios es $\frac{C(x)}{x} = \frac{C_o}{x}+1+0'01.x$, entonces, para que $x = 100$ minimice el coste medio se debe cumplir que, como $\left(\frac{C(x)}{x}\right)' = \frac{-C_o}{x^2}+0'01 = 0$ o, equivalentemente, $x^2 = \frac{C_0}{0'01} = 100C_0$, tenemos que $100 = x = 10\sqrt{C_0}$ o, en otras palabras, $C_0 = 100$, para cualquier valor de a. Además, dicho punto $x = 100$ es minimizador global, ya que $C(x)/x$ es convexa

b) Como la función de beneficios es $B(x) = p\left(x\right).x - C(x) = (a-\dfrac{x}{50})x-(C_0+x+0,01x^2)$ entonces, para que $x = 100$ maximice el beneficio se debe cumplir que, como $B'(x) = a - 0'04x - 1 - 0,02x = 0$, entonces se debe cumplir que $a = 1+0'06x$, y como $x = 100$ debe ser la solución, entonces $a = 7$, para cualquier valor de C_0. Además, dicho punto $x = 100$ es maximizador global ya que $B(x)$ es cóncava.

5. Se considera la función $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x)$ la recta tangente a la gráfica de f en el punto $x = 1$. Se pide:

a) Dibujar el recinto cerrado A limitado por las funciones f, g, el eje horizontal y la recta $x = 3$. Asimismo, hallar los maximales y minimales, máximo y mínimo de A, si existen.

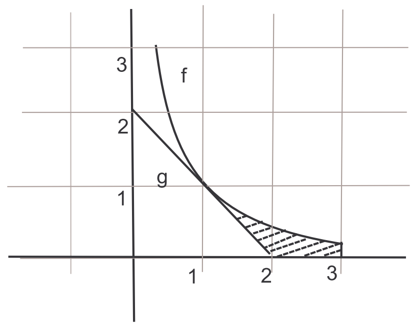
b) Calcular el área del recinto anterior.

1 punto

---

a) La gráfica de $f(x) = \frac{1}{x}$ es la hipérbola equilatera. La tangente en el punto $x = 1$ es la función $g(x) = 2 - x$.

Dicha tangente queda por debajo de la hipérbola (pues esta función es convexa)
y corta al eje horizontal en el punto $x = 2$.
Por lo tanto, el recinto tiene una forma así:



Obviamente, $\max(A), \min(A)$ no existen, pues maximales(A)= $\{(x, y) : y = \frac{1}{x}, 1 \leq x \leq 3\}$ minimales(A)= $\{(x, y) : y = 2 - x, 1 \leq x \leq 2\}$.

b) El conjunto A puede entenderse como la unión de otros dos conjuntos:

1) el conjunto A_1 limitado por las funciones f, g y la recta $x = 2$.
El valor de dicha área es:
$\int_1^2 (\frac{1}{x} - (2 - x))dx = \left[\ln x - 2x + \frac{1}{2}x^2\right]_1^2 = \ln 2 - 4 + 2 - (0 - 2 + \frac{1}{2}) =$
$= \ln 2 - \frac{1}{2}$ unids área

2) el conjunto A_2 limitado por las funciones f, el eje horizontal y las rectas $x = 2, x = 3$. El valor de dicha área es:
$\int_2^3 \frac{1}{x}dx = [\ln x]_2^3 = \ln 3 - \ln 2$ unids área

Por lo tanto, el área del conjunto A es:
$\text{área}(A) = \ln 2 - \frac{1}{2} + \ln 3 - \ln 2 = \ln 3 - \frac{1}{2}$ unids área.

6. Dada la función $f(x) = a\ln(ax)$, donde $a > 0$. Se pide:

a) Hallar la integral indefinida $F(x) = \int f(x)dx$.

b) Determinar el valor de a de modo que la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto $x = 2$ pase por el punto $(0, 0)$.

Observación: se puede hacer el apartado b) sin resolver el apartado a).

1 punto

---

a) Aplicando que $\ln(ax) = \ln a + \ln x$, se cumple que
$\int a\ln(ax)dx = (a\ln a)x + a\int \ln x dx = (a\ln a)x + a(x\ln x - x) + C = ax(\ln a + \ln x) - ax + C$

b) Como $f\,'(x) = \frac{a}{x}$, $f\,'(2) = \frac{a}{2}$, se deduce que la recta tangente a f en el punto $x = 2$ será:
$y - a\ln(2a) = \frac{a}{2}(x - 2)$.
Como dicha recta tangente debe pasar por el origen, cumplirá la ecuación:
$-a\ln(2a) = \frac{a}{2}(-2) \Longrightarrow \ln(2a) = 1 \Longrightarrow a = \frac{e}{2}$.
Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente será:
$y - \frac{e}{2}\ln(e) = \frac{e}{4}(x - 2)$, o bien, $y - \frac{e}{2} = \frac{e}{4}(x - 2)$.