Ejercicio	1	2	3	4	5	6	Nota
Puntos							

Nota Ex.	Nota clase	Nota Final

Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía **Examen Final de Matemáticas I** **16 de Junio de 2009**

APELLIDOS:		**NOMBRE:**
DNI:	**Titulación:**	**Grupo:**

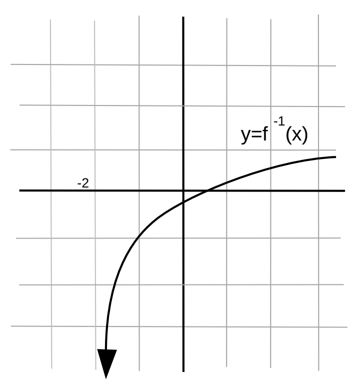
1. **Dada la función $f(x) = e^{x+1} - 2$, se pide:**
   a) Hallar la función inversa de $f(x)$ y representarla (la inversa). Es decir, calcular el dominio, la imagen, los puntos de corte con los ejes y los intervalos de crecimiento/decrecimiento de f^{-1}.
   b) Representar la gráfica de la función $g(x) = |f(x)|$. Es decir, calcular el dominio, la imagen, los puntos de corte con los ejes y los intervalos de crecimiento/decrecimiento de g.
   1 punto

---

a) Para hallar la función inversa, planteamos la ecuación $y = f^{-1}(x)$ cumplirá que: $e^{y+1} - 2 = f(y) = ff^{-1}(x) = x$, de donde se deduce que $x + 2 = e^{y+1}$, luego $\ln(x+2) = y + 1$, luego $f^{-1}(x) = y = \ln(x+2) - 1$.

En cuanto a la representación de f^{-1}, basta notar que f es creciente, que tiene asíntota horizontal $y = -2$ en $-\infty$, que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, y que corta a los ejes en los puntos siguientes: eje horizontal en el punto (ln2-1,0) ; eje vertical en el punto (0,e-2).

Luego, por simetría, el dominio de f^{-1} será el intervalo $(-2, \infty)$, la imagen será $\mathbb{R}$, los puntos de corte con los ejes serán: eje horizontal en el punto $(e-2, 0)$; eje vertical en el punto $(0, ln2 - 1)$, f^{-1} es creciente en todo su dominio y, por tanto, la gráfica de $f^{-1}(x)$ será, aproximadamente, así:



Observación: la representación de f^{-1} también se puede estudiar directamente a partir de la expresión de la inversa de f, es decir, estudiando $f^{-1}(x) = \ln(x+2) - 1$, en lugar de utilizar simetría respecto a la bisectriz del primer cuadrante a partir de f.

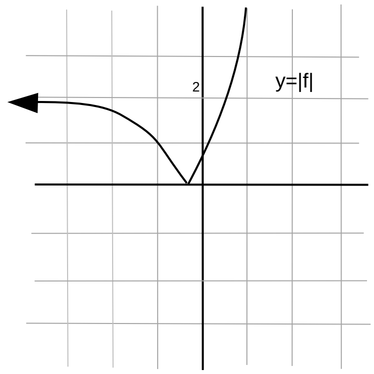
b) Como es evidente, el dominio de la función g es $\mathbb{R}$. En cuanto a la imagen de g, está claro que está contenida en el intervalo $[0, \infty)$.

Por otra parte, como $g(\ln 2 - 1) = 0$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$, y además g es continua, se deduce que $Im(g) = [0, \infty)$.

El punto de corte con los ejes horizontal y vertical serán los mismos que los de f, es decir, $(ln2 - 1, 0)$ y $(0, e - 2)$.

Por último, f es decreciente en el intervalo $(-\infty, \ln 2 - 1)$ y creciente en el intervalo $(\ln 2 - 1, \infty)$.

Por lo tanto, la gráfica de g será, aproximadamente, así:


2
y=|f|

2. Sean a, b números reales y consideremos la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} |x+a|, & x < 2 \\ b, & x = 2 \\ -x^2+6x, & x > 2 \end{cases}$$

a) Estudiar, según los valores de a y b, la continuidad de f en el intervalo $[1,3]$.

b) Enunciar el teorema de Weierstrass y, suponiendo que $a = -10$, discutir, según los valores de b, cuando se cumplen las hipótesis y la tesis de dicho teorema para la función anterior en el intervalo $[0,2]$.

1 punto

---

a) Para que f sea continua en 2^+ es necesario y suficiente que se cumpla $b = 8$.
Y ahora, para que f sea continua en 2^- , es necesario y suficiente que $|2+a| = 8$;
o, equivalentemente, que $a = 6$ o $a = -10$.

b) Si $b = 8$, se cumplen las hipótesis y la tesis del teorema por el apartado anterior.
Si $b > 8$, no se cumplen las hipótesis (por el apartado a)) ni tampoco la tesis, pues
$\lim\limits_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = 8, f(2) = b > 8$, luego $\inf\{f(x) : x \in [0,2]\} = 8 \neq f(x)$
pues $f(x)$ es decreciente en $[0,2)$.
Y, si $b < 8$, no se cumplen las hipótesis (por el apartado a)),
pero sí la tesis del teorema, pues:
$\max\{f(x) : x \in [0,2]\} = f(0)$, $\min\{f(x) : x \in [0,2]\} = f(2)$.

3. Se considera la función $f(x) = xe^{-x}$. Se pide:

a) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos locales (o relativos) y globales (o absolutos), así como las asíntotas de f.

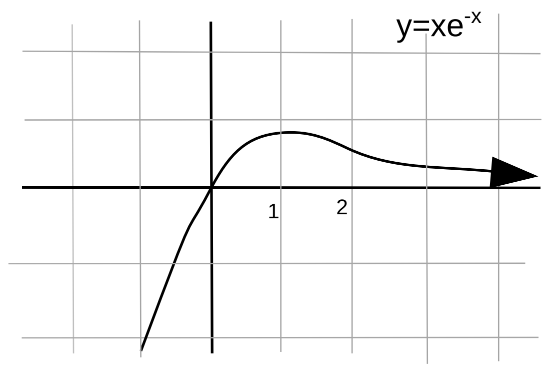
b) Hallar los intervalos de concavidad y convexidad, los puntos de inflexión, y representar la gráfica de dicha función.

1 punto

---

a) Derivando la función, obtenemos que $f\,'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$, luego
$f\,'(x) = 0 \Longleftrightarrow e^{-x} = xe^{-x} \Longleftrightarrow x = 1$. Como $f\,'(0) = 1, f\,'(2) < 0$, obtenemos que:
f es creciente en $(-\infty, 1)$ y decreciente en $(1, \infty)$; $x = 1$ es maximizador local y global de f.
Por otro lado, como $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \infty$, luego la función no tiene asíntota ni horizontal ni oblicua en $-\infty$.
Sin embargo, como $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{e^x} =$ (aplicando L'Hopital) $= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{e^x} = \dfrac{1}{\infty} = 0$, la función tiene asíntota horizontal $y = 0$ en ∞.
Finalmente, como la función es continua, no posee ninguna asíntota vertical.

b) $f''(x) = -e^{-x} + (1-x)e^{-x}(-1) = (x-2)e^{-x}$. Por lo tanto:
f será cóncava en el intervalo $(-\infty, 2)$ y convexa en $(2, \infty)$. El único punto de inflexión se hallará en $x = 2$.
Por último, añadiendo a lo anterior que $f(0) = 0$, f es negativa en los negativos y positiva en los positivos, la gráfica de esta función será, aproximadamente, así:



4. Sea $C(x) = 30 + 100x + 0.'3x^2$ la función de costes de una empresa monopolista, donde $x \geq 0$ es el número de unidades producidas de cierta mercancía. La función inversa de demanda (o precio por unidad) es $p(x) = 500 - 0'7x$. Se pide:

a) Probar que la función de beneficios es cóncava y, a partir de ahí, determinar la cantidad x que maximiza el beneficio.

b) Probar que la función de costes medios es convexa y, a partir de ahí, determinar la cantidad x que minimiza el coste medio.

1 punto

---

a) La función de beneficios es: $B(x) = p(x)x - C(x) = 500x - 0'7x^2 - (30 + 100x + 0'3x^2) =$
$= -x^2 + 400x - 30$, luego $B"(x) = -2 < 0$.
Por tanto $B(x)$ es cóncava. Luego el punto crítico será único y maximizador global. Ahora bien:
$B\,'(x) = -2x + 400 = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{400}{2} = 200$
que es una solución aceptable, pues es una producción positiva cuyo precio de venta es
$p(200) = 500 - (0'7).200 = 360 > 0$.
Luego la producción $x = 200$ maximiza el beneficio.

b) La función de coste medio es convexa, pues $C_{med}(x) = \dfrac{C(x)}{x} = \dfrac{30}{x} + 100 + 0'3x$ satisface que
$C"_{med}(x) = \dfrac{60}{x^3} > 0$. Por lo tanto, el punto crítico será único y minimizador global del coste medio.
Ahora bien:
$C'_{med}(x) = -\dfrac{30}{x^2} + 0'3 = 0 \Longrightarrow x = 10$. Luego en este punto se alcanzará el minimizador global del coste medio.

5. Dada $f(x) = x\ln(0'25x)$, definida en el intervalo $(0, \infty)$, se pide:

a) Estudiar el crecimiento/decrecimiento de cualquier primitiva F de f, así como la posible existencia de extremos (locales y/o globales).

b) Hallar la primitiva F de f que cumple $F(4) = 0$.

Sugerencia: no es necesario conocer la expresión de $F(x)$ para el apartado a).

1 punto

---

a) Para estudiar el crecimiento/decrecimiento, así como los extremos de F, necesitamos la derivada de F. Pero como $F'(x) = f(x) = x\ln(0'25x)$

Entonces F es creciente cuando F' es positiva, es decir, cuando $0'25x > 1$, es decir, en el intervalo $(4, \infty)$.

Análogamente, F es decreciente cuando F' es negativa, es decir, en el intervalo $(0, 4)$.

Por lo tanto, F alcanza un mínimo local y global en el punto $x = 4$.

b) En primer lugar, utilizando el método de integración por partes, hallemos la ecuación de todas las primitivas de f.

$\int f(x)dx = \int x\ln(0'25x)dx = \dfrac{x^2}{2}\ln(0'25x) - \int \dfrac{x^2}{2}\dfrac{0'25}{0'25x}dx = \int \dfrac{x}{2}dx = \dfrac{x^2}{2}\ln(0'25x) - \dfrac{x^2}{4} + C$

Y ahora, como nos interesa, de entre todas las primitivas, aquella que cumpla $F(4) = 0$, se deduce que $8\ln(1) - 4 + C = F(4) = 0 \Longrightarrow C = 4$.

Por lo tanto, $F(x) = \dfrac{x^2}{2}\ln(0'25x) - \dfrac{x^2}{4} + 4$.

6. Se considera el conjunto $A = \{(x,y) : x-3 \leq y \leq -x^2+3x\}$. Se pide:

a) Calcular el área de dicho conjunto.

b) Estudiar, con el orden de Pareto, los puntos maximales y minimales, así como el máximo y el mínimo del conjunto A, si existen.

Sugerencia: representar gráficamente el conjunto A.

1 punto

---

a) Como la parábola $y = -x^2 + 3x$ corta a la recta $y = x - 3$ en los puntos $x = -1, x = 3$, y la parábola es cóncava, la parábola queda por encima de dicha recta en el intervalo $[-1, 3]$.
Por lo tanto, el área del conjunto A será:
$\int_{-1}^{3}((-x^2+3x)-(x-3))dx = \int_{-1}^{3}(-x^2+2x+3)dx = [(-\frac{1}{3})x^3 + x^2 + 3x]_{-1}^{3} =$
$= (-9+9+9) - (\frac{1}{3}+1-3) = 9 - (-\frac{5}{3}) = \frac{32}{3}$.

b) Como la parábola alcanza un máximo en el punto $x = \frac{3}{2}$, pues $f(x) = -x^2 + 3x$ cumple que $f\,'(x) = -2x + 3 = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{3}{2}$, la parábola es decreciente en el intervalo $[\frac{3}{2}, 3]$.
Y, como los puntos (x, y) del conjunto A cumplen que $x \leq 3$, se deduce que
maximales $(A) = \{(x, y) : y = -x^2 + 3x, \frac{3}{2} \leq x \leq 3\} \Longrightarrow$ no existe máximo de A.
Por otro lado, como tanto la parábola $y = -x^2 + 3x$ como la recta $y = x - 3$ son crecientes en el intervalo $[-1, \frac{3}{2}]$, y los puntos (x, y) de A cumplen que $x \geq -1$, se deduce que
minimales $(A) =$ mínimo $(A) = (-1, -4)$.
Observación: el conjunto A tiene una forma, aproximadamente, así: