Universidad Carlos III de Madrid

Ejercicio	1	2	3	4	5	Total
Puntos						

Departamento de Economía **Matemáticas I Examen Final**

11 enero 2023 **Duración: 2 horas**

APELLIDOS:		**NOMBRE:**
ID:	**GRADO:**	**GRUPO:**

(1) **Sea la función** $f(x) = (x^2-4)^{\frac{2}{3}}$, **definida en** $[0,\infty)$. **Se pide:**

(a) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos globales y la imagen de $f(x)$.

(b) Hallar los intervalos de concavidad y convexidad, los puntos de inflexión de $f(x)$ y representar la gráfica de la función.

(c) Considerar $f_b(x)$ la función $f(x)$ restringida al intervalo $[0,b]$, donde $b \geqslant 2$. Hallar el máximo global (y los maximizadores globales) de $f_b(x)$.

0,4 puntos apartado a); 0,4 puntos apartado b); 0,2 puntos apartado c)

---

a) Por un lado, $f\ (x)$ es continua en todo su dominio. Por otro lado, como $x^{\frac{2}{3}}$ es derivable excepto en $x=0$, $f(x)$ es derivable excepto cuando $x^2-4=0$; esto es, cuando $x=2$.
Y como $f'(x) = 2\dfrac{2x}{3(x^2-4)^{\frac{1}{3}}}$, los puntos críticos son $x=0$ y $x=2$.
$f'(1)<0$, luego $f'(x)<0$ si $x\in(0,2)$, luego $f(x)$ es decreciente en $[0,2]$.
$f'(3)>0$, luego $f'(x)>0$ si $x\in(2,\infty)$, luego $f\ (x)$ es creciente en $[2,\infty)$.
Obviamente $x=2$ es el minimizador global de $f(x)$, pues $f(2)=0<f(x)$ si $x\neq 2$.
Por otro lado, $f\ (x)$ no tiene máximo global, pues $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} f(x)=\infty$.
Finalmente, por lo anterior, la imagen de $f(x)$ sería $[0,\infty)$.

b) Para cualquier $x\neq 2$ existe $f"(x)$. Y como

$$f''(x) = \frac{4}{3}\frac{(x^2-4)^{\frac{1}{3}} - x\cdot(\frac{1}{3})(x^2-4)^{-\frac{2}{3}}2x}{(x^2-4)^{\frac{2}{3}}} =$$

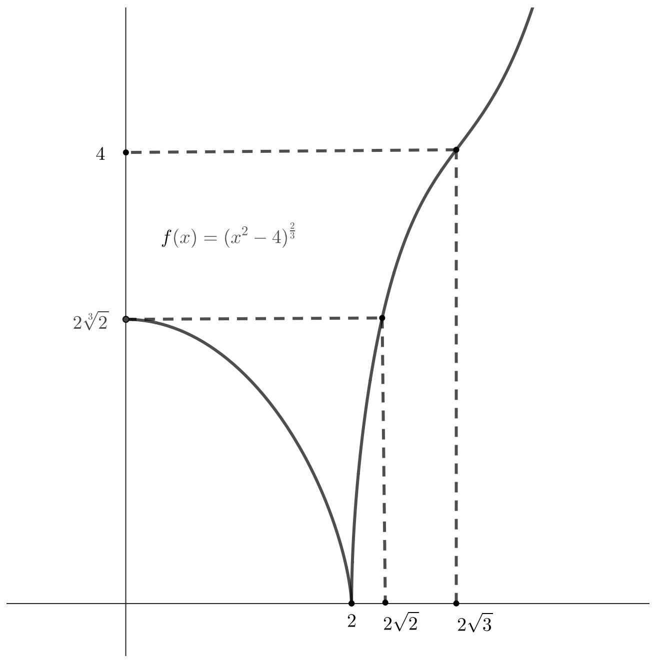
multiplicando numerador y denominador por $3(x^2-4)^{\frac{2}{3}}$

$$= \frac{4}{9}\frac{3(x^2-4)-2x^2}{(x^2-4)^{\frac{4}{3}}} = \frac{4}{9}\frac{x^2-12}{(x^2-4)^{\frac{4}{3}}}$$

la derivada segunda se anula en $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$.
$f''(1)<0$, luego $f''(x)<0$ si $x\in(0,2)$, luego $f(x)$ es cóncava en $[0,2]$.
$f''(3)<0$, luego $f''(x)<0$ si $x\in(2,2\sqrt{3})$, luego $f(x)$ es cóncava en $[2,2\sqrt{3}]$.
$f''(4)>0$, luego $f''(x)>0$ si $x\in(2\sqrt{3},\infty)$, luego $f(x)$ es convexa en $[2\sqrt{3},\infty)$.
De lo anterior se deduce que $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ es un punto de inflexión.
Observación: ni $x=2$ es un punto de inflexión ni $f(x)$ es cóncava en $[0,2\sqrt{3}]$, pues el segmento que une $(1,f(1))$ con $(3,f(3))$ no queda debajo de gráfica de $f(x)$ en el punto $x=2$.
Así pues, la gráfica de la función quedaría, aproximadamente, como se puede ver al final.

c) Como hemos visto, $f(x)$ es decreciente en $[0,2]$ y creciente en $[2,\infty)$.
Así pues, llamando x^* al único punto del intervalo $(2,\infty)$ que cumple:
$f(x^*)=f(0)=4^{\frac{2}{3}}$, se cumple que:
si $b<x^* \Longrightarrow Max(f_b)=f(0)$; maximizador $(f_b)=\{0\}$.
si $b=x^* \Longrightarrow Max(f_b)=f(0)$; maximizador $(f_b)=\{0,x^*\}=\{0,b\}$.
si $b>x^* \Longrightarrow Max(f_b)=f(b)$; maximizador $(f_b)=\{b\}$.
¿Cuanto vale x^*? Como $f(x^*)=(x^{*2}-4)^{\frac{2}{3}}=4^{\frac{2}{3}} \Longrightarrow$
$x^{*2}-4=4 \Longrightarrow x^{*2}=8 \Longrightarrow x^*=2\sqrt{2}$

Ver, de nuevo, la gráfica de la función.



(2) **Dada la función $y = f(x)$, definida de forma implícita mediante la ecuación $4x^2 + 2y - y^3 = 1$ en un entorno del punto $x = 0, y = 1$, se pide:**

(a) Hallar la recta tangente y el polinomio de Taylor de grado 2 de f en $a = 0$.

(b) Representar, aproximadamente, la gráfica de f cerca del punto $x = 0$.

(c) Considerar $f_\delta(x)$ la función anterior, restringida a un intervalo $[0, \delta)$. Representar la inversa de dicha función.

Calcular, aproximadamente, utilizando el polinomio de Taylor de $f_\delta(x)$, su inversa.

Sugerencia para b y c: utilizar que $f"(0) > 0$.

0,4 puntos apartado a); 0,2 puntos apartado b); 0,4puntos apartado c).

---

a) Antes de nada, observamos que el punto $(0, 1)$ satisface la ecuación.

A continuación, en primer lugar, calculamos la derivada primera de la función:

$8x + 2y' - 3y^2y' = 0$

sustituyendo $x = 0,\ y(0) = 1$ se deduce que $y'(0) = f'(0) = 0$.

Luego la ecuación de la recta tangente sería: $y = P_1(x) = 1$.

Análogamente, calculamos la derivada segunda de la función:

$8 + 2y'' - 3y^2y'' - 6y(y')^2 = 0$

sustituyendo $x = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$ se deduce que $y''(0) = f"(0) = 8$.

Luego la ecuación del polinomio de Taylor sería: $y = P_2(x) = 1 + 4x^2$

b) Utilizando el polinomio de Taylor de orden 2, la gráfica de f, cerca del punto $x = 0$.

sería, aproximadamente, como se ve en la figura al final.

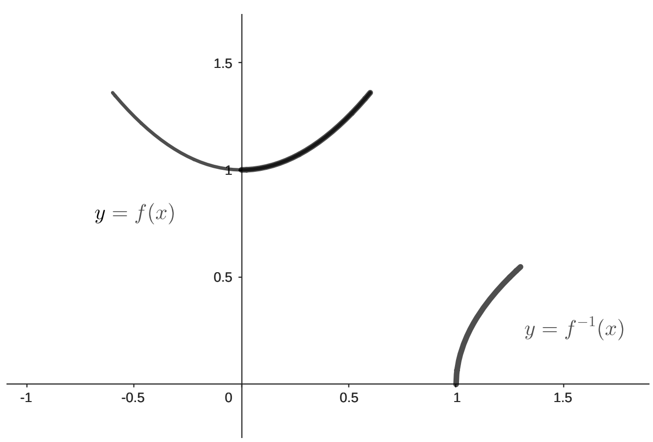
c) La gráfica de la inversa de la función $f_\delta(x)$ por simetría respecto a la diagonal principal, vendría dada, aproximadamente, de la forma que indica el dibujo.

Por otro lado, utilizando el polinomio de Taylor, tenemos que, para $x \approx 0$:

$f_\delta(x) \approx 1 + 4x^2$, luego la inversa del polinomio de Taylor, para valores de $x \geqslant 0$,

vendría dada por la ecuación: $1 + 4y^2 = x \Longrightarrow y^2 = (x - 1)/4 \Longrightarrow y = \frac{1}{2}\sqrt{x - 1}$

Luego $f_\delta^{-1}(x) \approx \frac{1}{2}\sqrt{x - 1}$, cuando $x \approx 1, x \geq 1$.



(3) **Sea $C(x) = C_0 + 2x + x^2$ la función de costes y $p(x) = a - 5x$ la función inversa de demanda de una empresa monopolista, donde $a, C_0 > 0, x \geqslant 0$. Se pide:**

(a) Si sabemos que el nivel de producción para el que se maximiza el beneficio es $x^* = 4$, calcular el valor del parámetro a.

(b) Si sabemos que el nivel de producción para el que se minimiza el coste medio es $x^* = 4$, calcular el valor del parámetro C_0.

(c) Enunciar el teorema de Rolle. Para la función de beneficios del apartado a), hallar los intervalos $[\alpha, \beta]$ donde:

(i) se cumplen las hipótesis del teorema.

(ii) se cumple la tesis del teorema (aunque quizás no se cumplan las hipótesis).

0,4 puntos apartado a); 0,3 puntos apartado b); 0,3 puntos apartado c).

---

a) En primer lugar, calculamos la función de beneficios.
$B(x) = (a - 5x)x - (C_0 + 2x + x^2) = -6x^2 + (a - 2)x - C_0$
Si calculamos la primera y segunda derivada de B :
$B'(x) = -12x + a - 2; B"(x) = -12 < 0$
luego vemos que B tiene un único punto crítico en $x^* = \dfrac{a-2}{12}$ y, como B es una función cóncava, este punto crítico es el único maximizador global.
Luego $x^* = 4 = \dfrac{a-2}{12} \Longrightarrow a = 50$

b) Como la función de costes medios es $\dfrac{C(x)}{x} = \dfrac{C_0}{x} + 2 + x$,
su derivada sería: $\left(\dfrac{C(x)}{x}\right)' = -\dfrac{C_0}{x^2} + 1 = 0 \Longleftrightarrow x^2 = C_0$.
Como $\left(\dfrac{C(x)}{x}\right)'' = \dfrac{2C_0}{x^3} > 0$, la función es convexa y el punto crítico sería minimizador global.
Luego $x^* = 4 \Longrightarrow C_0 = 16$

c) La hipótesis es que, en el intervalo $[\alpha, \beta]$, $B(x)$ debe ser continua,
en el intervalo (α, β), $B(x)$ debe ser derivable y, además, $B(\alpha) = B(\beta)$.
Como $B(x)$ es una parábola, la gráfica es simétrica respecto a la recta $x = 4$,
luego $0 \leq \alpha < \beta$ debe cumplir que $(\alpha + \beta)/2 = 4$.
La tesis es que existe $\gamma \in (\alpha, \beta)$ que cumple $B'(\gamma) = 0$.
Obviamente, se cumple si $0 \leq \alpha < 4 < \beta$, pues $B'(4) = 0$.

(4) **Sea** $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \sqrt{3+e^{2x}} & , \ x \leq 0 \\ \sqrt{a-be^{-x}} & x > 0 \end{array} \right\}$, **definida a trozos en** $\mathbb{R}$, donde $a > b > 0$**. Se pide:**

(a) Determinar qué condiciones han de cumplir a y b para que $f(x)$ sea derivable en $x = 0$.

(b) Estudiar si dicha función tiene asíntota en $-\infty$, así como la concavidad/convexidad de $f(x)$ en $(-\infty, 0)$.

(c) Estudiar la monotonía y dibujar la gráfica de $f(x)$ definida solamente en $(-\infty, 0]$.

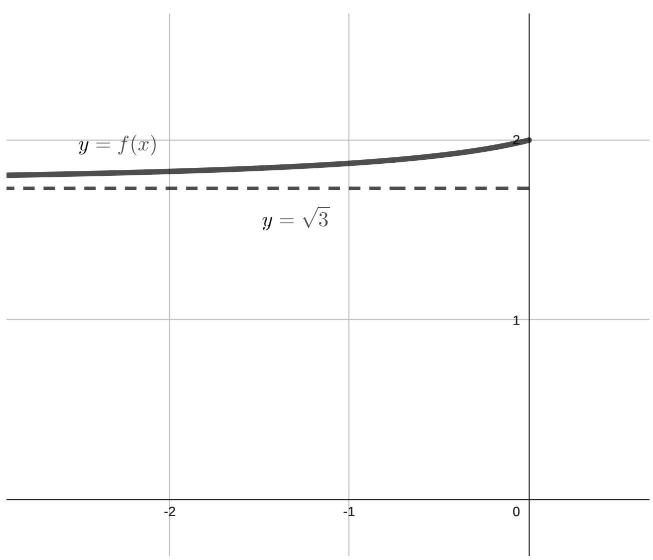
0,4 puntos apartado a); 0,3 puntos apartado b); 0,3 puntos apartado c).

---

a) Necesitamos, en primer lugar, imponer la continuidad de f en $x = 0$.
Como $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \sqrt{a-b}$, y como $f(0) = 2 = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} f(x)$
se deduce que la función sería continua en $x = 0$ cuando:
$a - b = 4$.
Por otro lado, suponiendo f continua, la función sería derivable en $x = 0$ cuando:
$\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = f'(0^+)$ sea igual a $f'(0^-)$. Y ahora tenemos que:
i) $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{be^{-x}}{2\sqrt{a-be^{-x}}} = \dfrac{b}{2\sqrt{a-b}} = \dfrac{b}{4}$;
ii) $x < 0 \Longrightarrow f\ '(x) = \dfrac{2e^{2x}}{2\sqrt{3+e^{2x}}} \Longrightarrow f'(0^-) = \dfrac{2}{4}$.
Por tanto, $f(x)$ es derivable en $x = 0$ cuando $b = 2, a = 6$.

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{3+e^{2x}} = \sqrt{3}$. Luego $y = \sqrt{3}$ asíntota horizontal en $-\infty$.
Respecto a la convexidad/concavidad, observamos que:
$x < 0 \Longrightarrow f"(x) = \dfrac{2e^{2x}\sqrt{3+e^{2x}} - e^{2x}(2e^{2x}/2\sqrt{3+e^{2x}})}{3+e^{2x}} \Longrightarrow$
$f"(x) = \dfrac{2e^{2x}(3+e^{2x}) - e^{2x}e^{2x}}{(3+e^{2x})^{3/2}} = \dfrac{6e^{2x}+e^{4x}}{(3+e^{2x})^{3/2}} > 0.$
Luego $f(x)$ convexa en $(-\infty, 0)$.

c) La función es obviamente creciente en $(-\infty, 0]$; con una asíntota horizontal $y = \sqrt{3}$, la gráfica de f sería, aproximadamente, así:



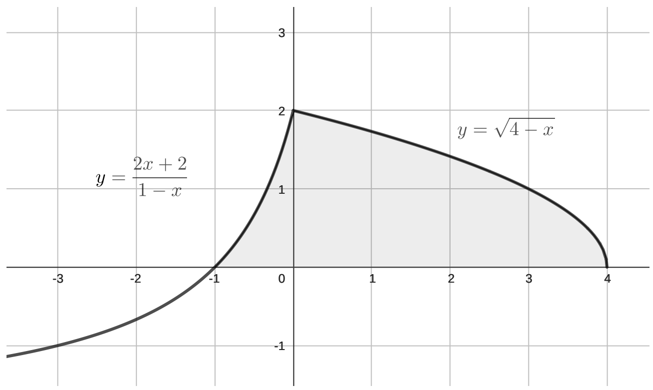
(5) **Dadas la funciones** $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, **definidas por:** $f(x) = \dfrac{2x+2}{1-x}$, $g(x) = \sqrt{4-x}$, **se pide:**

(a) Representar el conjunto A delimitado por las gráficas de $f(x)$, $g(x)$ y el eje $y = 0$.
Hallar, si existen, los maximales y minimales, máximo y mínimo de A según el orden de Pareto.

(b) Calcular el área del conjunto dado.
0,4 puntos apartado a); 0,6 puntos apartado b)

---

a) En primer lugar, observamos que la recta $y = 0$ corta a las gráficas de las funciones:
$f(x)$ cuando $x = -1$ y $g(x)$ cuando $x = 4$.
Además, $f(x)$ es creciente en $[-1, 1)$ (pues $f(x) = \dfrac{2x-2+4}{1-x} = -2 + \dfrac{4}{1-x}$ y, por tanto, $f'(x) = \dfrac{4}{(1-x)^2} > 0$) y $g(x)$ es decreciente, luego sus gráficas solo se cortarán en un único punto de dicho intervalo; concretamente, en $x = 0$, pues $f(0) = 2 = g(0)$.
Y, si $x > 1, f(x) < 0 \leq g(x)$, luego dichas gráficas no se cortan en el intervalo $(1, 4]$.
Por tanto, el dibujo de A sería, aproximadamente, así:



Así pues, el orden de Pareto nos describe al conjunto así:
máximo(A) no existe; maximales$(A) = \{(x, g(x)) : 0 \leq x \leq 4\}$.
mínimo$(A) = (-1, 0) =$ minimales(A).

b) En primer lugar, por la posición de las funciones, sabemos que:
Área(A)$= \int\limits_{-1}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{4} g(x)dx$.
Como $\int f(x)dx = \int(-2 + \frac{4}{1-x})dx = -2x - 4\ln(1-x)$, luego, por la regla de Barrow:
$\int\limits_{-1}^{0} f(x)dx = [-2x - 4\ln(1-x)]_{-1}^{0} = 0 - (-2(-1) - 4\ln(1-(-1)) = -2 + 4\ln 2$.
Por otro lado, como $\int g(x)dx = \int \sqrt{4-x}dx = -\frac{2}{3}(4-x)^{3/2}$, luego, por la regla de Barrow:
$\int\limits_{0}^{4} g(x)dx = [-\frac{2}{3}(4-x)^{3/2}]_{0}^{4} = 0 - (-\frac{2}{3}(4-0)^{3/2}) = \frac{16}{3}$; por tanto:
Área(A)$= \int\limits_{-1}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{4} g(x)dx = -2 + 4\ln 2 + \frac{16}{3}$ unidades de área.