Universidad Carlos III de Madrid

Ejercicio	1	2	3	4	5	Total
Puntos						

Departamento de Economía **Matemáticas I Examen Final** **12 enero 2022**

Duración: 1 hora 50 minutos.

APELLIDOS:		**NOMBRE:**
ID:	**GRADO:**	**GRUPO:**

(1) **Sea la función** $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$**, definida en el intervalo**$(0, \infty)$**. Se pide:**

(a) Hallar las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

(b) Hallar los extremos locales y globales y la imagen de $f(x)$. Representar la gráfica de la función.

(c) Considerar $f_1(x)$ la función $f(x)$ restringida al intervalo $[1, \infty)$.
Representar la gráfica de la inversa de $f_1(x)$.

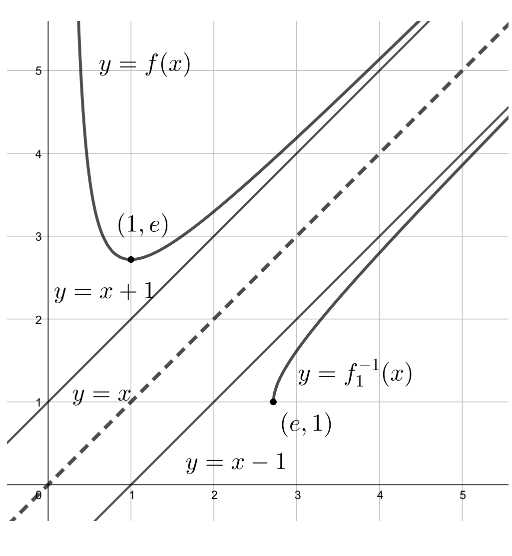
0,4 puntos apartado a); 0,4 puntos apartado b); 0,2 puntos apartado c)

---

a) El dominio de la función anterior es $(0, \infty)$.
Como f es continua en su dominio, solo hay que estudiar las asíntotas en 0 por la derecha y en $+\infty$:
i) haciendo el cambio de variable $x = \frac{1}{t}$ (de esta forma $x \longrightarrow 0^+$ cuando $t \longrightarrow +\infty$) obtenemos:
$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{t \longrightarrow \infty} f\left(\frac{1}{t}\right) = \lim_{t \longrightarrow \infty} \frac{e^t}{t} = \frac{\infty}{\infty} = [\text{por la regla de L' Hopital}] = \lim_{t \longrightarrow \infty} \frac{e^t}{1} = \infty$$
Luego $f(x)$ tiene asíntota vertical $x = 0$ por la derecha.
ii) $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}} = 1,$ y $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) - x = \lim_{x \longrightarrow \infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} =$
$$= \frac{0}{0} = [\text{por la regla de L'Hopital}] = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}(-1/x^2)}{(-1/x^2)} = 1.$$
Luego $f(x)$ tiene asíntota oblicua $y = x + 1$ en ∞.
Por último, como $f'(x) = e^{\frac{1}{x}}(1 - \frac{1}{x})$, se deduce por el signo de $f'(x)$ que f es creciente en $[1, \infty)$, pues $f'(x) > 0$ en dicho intervalo. Análogamente, f es decreciente en $(0, 1]$ al ser $f'(x) < 0$.

b) De lo anterior se deduce que el punto 1 es un minimizador local y global. Además, al no existir maximizador local, no lo puede haber global.
Por otro lado, como f es decreciente en $(0, 1]$ y creciente en $[1, \infty)$, $\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \infty$, por el teorema de los valores intermedios se deduce que la imagen de la función en intervalo $(0, \infty)$ será $[f(1), \infty) = [e, \infty)$.
Así pues, la gráfica de la función quedará, aproximadamente, como muestra la figura al final.

c) Como se puede apreciar, f_1 es creciente en $[1, \infty), f_1(1) = e$ y $f_1(x)$ tiene como asíntota oblicua $y = x + 1$.
Luego su inversa será creciente en $[e, \infty)$, tomará el valor 1 en el punto e, tendrá como asíntota oblicua la recta $y = x - 1$ y su gráfica será, aproximadamente, como muestra la siguiente figura:



(2) **Dada la función $y = f(x)$, definida de forma implícita mediante la ecuación**

$$-3x + 3y + e^{-x} + e^{y} = 2$$

en un entorno del punto $x = 0, y = 0$, se pide:

(a) Hallar la recta tangente y el polinomio de Taylor de grado 2 de f en $a = 0$.

(b) Representar la gráfica de f cerca del punto $x = 0$.

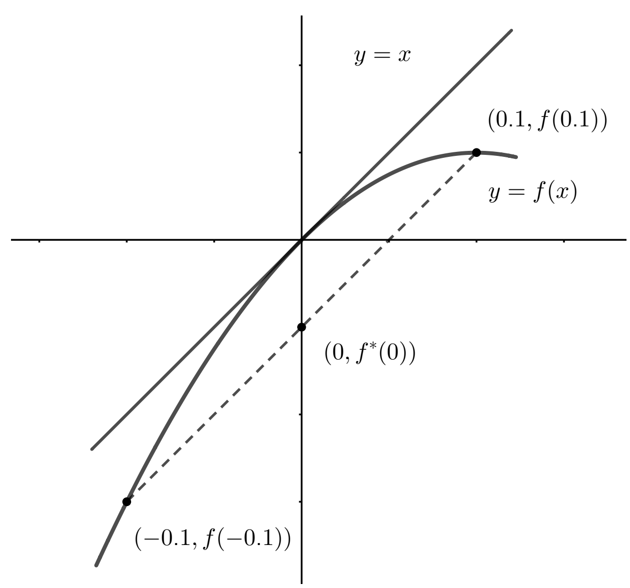
(c) Calcular aproximadamente, utilizando el polinomio de Taylor, $f(-0,1)$ y $f(0,1)$.
¿Será $f(0)$ mayor, menor o igual que el valor de $\frac{1}{2}(f(-0,1) + f(0,1))$?
Sugerencia para b y c: utilizar que $f''(0) < 0$.
0,4 puntos apartado a); 0,2 puntos apartado b); 0,4 puntos apartado c).

---

a) En primer lugar, calculamos la derivada primera de la función:
$-3 + 3y' - e^{-x} + y'e^{y} = 0$
sustituyendo $x = 0,\ y(0) = 0$ se deduce que $y'(0) = f'(0) = 1$.
Luego la ecuación de la recta tangente será: $y = P_1(x) = x$.
Análogamente, calculamos la derivada segunda de la función:
$3y'' + e^{-x} + y''e^{y} + (y')^2e^{y} = 0$
sustituyendo $x = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$ se deduce que $y''(0) = f''(0) = -1/2$.
Luego la ecuación del polinomio de Taylor será: $y = P_2(x) = x - \frac{1}{4}x^2$.

b) Utilizando el polinomio de Taylor de orden 2, la gráfica de f, cerca del punto $x = 0$ será, aproximadamente, como se ve en la figura al final.

c) Por otro lado, utilizando el polinomio de Taylor, tenemos que:
$f(-0,1) \approx -0,1 - \frac{1}{4}(-0,1)^2 = -0.1025$; $f(0,1) \approx 0,1 - \frac{1}{4}(0,1)^2 = 0.0975 \Longrightarrow \frac{1}{2}(f(-0,1) + f(0,1)) \approx -\frac{1}{4}(0,1)^2 \approx -0.0025$
Luego $\frac{1}{2}(f(-0,1) + f(0,1))$ es menor que $f(0) = 0$. O si se prefiere, se puede ver gráficamente, utilizando que la función $f(x)$ es cóncava cerca del punto $x = 0$.
Llamando $f^*(0) = \frac{1}{2}(f(-0,1) + f(0,1))$, el dibujo quedaría así:



(3) **Sea $C(x) = 36 + 16x + ax^2$ la función de costes y $p(x) = 76 - x$ la función inversa de demanda de una empresa monopolista, donde $a > 0$. Se pide:**

(a) Si sabemos que el nivel de producción para el que se maximiza el beneficio es $x^* = 6$, calcular el valor del parámetro a.

(b) Si sabemos que el nivel de producción para el que se minimiza el coste medio es $x^* = 6$, calcular el valor del parámetro a.

0,5 puntos apartado a); 0,5 puntos apartado b).

---

a) En primer lugar, calculamos la función de beneficios.
$B(x) = (76 - x)x - (36 + 16x + ax^2) = -(a+1)x^2 + 60x - 36$
Si calculamos la primera y segunda derivada de B :
$B'(x) = -2(a+1)x + 60; B''(x) = -2(a+1) < 0$
luego vemos que B tiene un único punto crítico en $x^* = \dfrac{60}{2(a+1)}$ y, como B es una función cóncava, este punto crítico es el único maximizador global.
Luego $x^* = 6 = \dfrac{60}{2(a+1)} \Longrightarrow a + 1 = 5 \Longrightarrow a = 4$

b) Como la función de costes medios es $\dfrac{C(x)}{x} = \dfrac{36}{x} + 16 + ax$,
su derivada será: $\left(\dfrac{C(x)}{x}\right)' = -\dfrac{36}{x^2} + a = 0 \Longleftrightarrow x^2 = \dfrac{36}{a}$.
Como $\left(\dfrac{C(x)}{x}\right)'' = \dfrac{72}{x^3} > 0$, la función es convexa y el punto crítico será minimizador global.
Luego $x^* = 6 = \dfrac{6}{\sqrt{a}} \Longrightarrow a = 1$

(4) **Sea**

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x+a & ,x\leq 1\\ bx^2+2x+1 & ,x>1\end{cases}$$

definida a trozos en el intervalo $[0,2]$. **Se pide:**

(a) Enunciar el teorema de Bolzano de los ceros para una función f cualquiera definida en $[0,2]$. Determinar qué condiciones han de cumplir a y b para que $f(x)$ cumpla las hipótesis de dicho teorema.

¿Se cumplen las hipótesis (o punto de partida) del teorema para algún $b<0$?

(b) Enunciar el teorema del valor medio (de Lagrange) para una función f cualquiera definida en $[0,2]$. Hallar a,b para que se satisfagan las hipótesis del teorema.

Para dichos valores a,b, hallar el/los punto(s) c que satisfacen la tesis de dicho teorema.

0,5 puntos apartado a); 0,5 puntos apartado b)

---

a) Las hipótesis son que f sea continua en $[0,2]$ y que, además, $f(0)\cdot f(2)<0$.

La tesis, o conclusión, es que existe $c\in(0,2)$ tal que $f(c)=0$.

Para ello, necesitamos, en primer lugar, imponer la continuidad de f en $x=1$.

Como $\lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} f(x)=f(1)=-1+a$ y como $\lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} f(x)=b+3$, se deduce que la función será continua en $[0,2]$ cuando: $a=b+4$ o, si se prefiere, $b=a-4$.

Por otro lado, suponiendo f continua, la condición $f(0)\cdot f(2)<0$ se cumplirá cuando:

i) $f(0)=a<0$ y $f(2)=4b+5>0$; o bien

ii) $f(0)=a>0, f(2)=4b+5<0$.

Así pues, en el primer caso si $a<0$ (o $b<-4$ al ser $b=a-4$), tenemos $f(2)=4b+5>0\Longrightarrow b>\frac{-5}{4}$ lo cual es imposible y no se cumple la condición i) en ningún caso.

Por otro lado, si $a>0$ (o $b>-4$ al ser $b=a-4$), tenemos $f(2)=4b+5<0\Longrightarrow b<\frac{-5}{4}$ y obtenemos la solución: $-4<b<\frac{-5}{4}$ o $0<a<\frac{11}{4}$ para que se cumplan las condiciones del teorema en el caso ii).

b) Las hipótesis son que f sea continua en $[0,2]$ y derivable en $(0,2)$.

La tesis, o conclusión, es que existe $c\in(0,2)$ tal que $f(2)-f(0)=2f'(c)$.

Hemos vistos que la función será continua en $[0,2]$ cuando: $a=b+4$.

Necesitamos ahora, suponiendo la continuidad de f, imponer su derivabilidad en $x=1$.

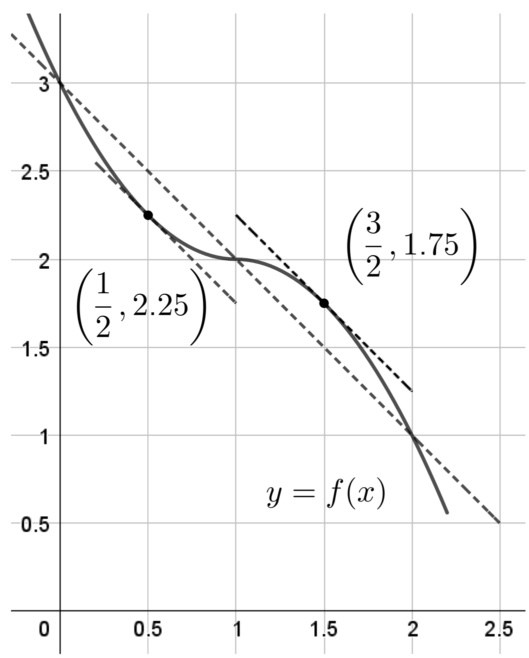
Como $f'(x)=\begin{cases} 2x-2 & ,x<1\\ 2bx+2 & ,x>1\end{cases}$ se cumple que $\lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} f'(x)=0$, $\lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} f'(x)=2b+2$

Ahora, suponiendo la continuidad de $f'(x)$ en $x=1$ si $2b+2=0$. Luego se cumplen las hipótesis de este teorema cuando $b=-1$, $a=3$. Por tanto, el punto c debe cumplir que $f(2)-f(0)=-2=2f'(c)$. Obviamente, $c\neq 1$; y entonces:

i) si $c<1$: $2c-2=-1\Longrightarrow c=\frac{1}{2}$

i) si $c>1$: $-2c+2=-1\Longrightarrow c=\frac{3}{2}$

La situación se puede ver en el dibujo.



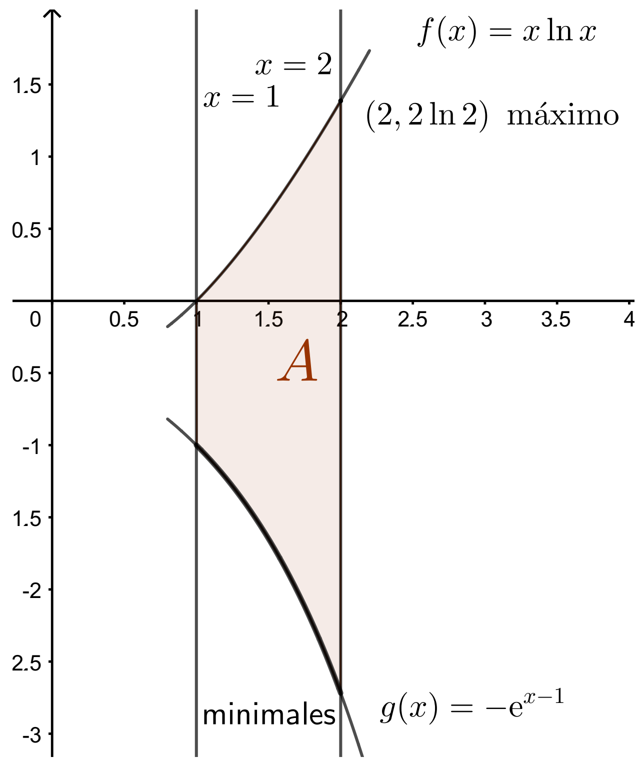
(5) **Dadas la funciones $f, g : [1, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$, definidas por: $g(x) = -e^{x-1}$, $f(x) = x \ln x$, se pide:**

(a) Representar aproximadamente el conjunto A, delimitado por las gráficas de dichas funciones y las rectas $x = 1, x = 2$.
Hallar, si existen, los maximales y minimales, máximo y mínimo de A.

(b) Calcular el área del conjunto dado.
Sugerencia para a: el orden de Pareto viene dado por: $(x_0, y_0) \leq_P (x_1, y_1) \Longleftrightarrow x_0 \leq x_1,\ y_0 \leq y_1$.
0,4 puntos apartado a); 0,6 puntos apartado b)

---

a) $f(x)$ es creciente en $[1, 2]$ (pues $f'(x) = 1 + \ln x > 0$) y $g(x)$ es decreciente (pues $g'(x) = g(x) < 0$).
Además, como $g(1) = -1 < 0 = f(1)$, se cumple que:
$g(x) < f(x)$ si $1 < x < 2$
Por lo tanto, el dibujo de A será, aproximadamente, así:



Así pues, el orden de Pareto nos describe al conjunto así:
máximo(A) =maximales$(A) = (2, 2\ln 2) = (2, \ln 4)$,
mínimo no existe, minimales$(A) = \{(x, g(x) : 1 \leq x \leq 2\}$.

b) En primer lugar, por la posición de las funciones, sabemos que:
área(A)$=\int_1^2 (f(x) - g(x))dx = \int_1^2 (x \ln x - (-e^{x-1}))dx$.
Calculamos una primitiva de $f(x)$ por partes:
$$\int x \ln x dx = (\text{llamando } v' = x,\ u = \ln x) = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4}$$
y, como la otra primitiva es inmediata, aplicando la regla de Barrow, obtenemos que:
$$\int_1^2 (x \ln x + e^{x-1})dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + e^{x-1}\right]_1^2 = 2\ln 2 - 1 + e - (-\frac{1}{4} + 1) =$$
$= \ln 4 + e - \dfrac{7}{4}$ unidades de área.