Universidad Carlos III de Madrid

Ejercicio	1	2	3	4	5	6	Total
Puntos							

Departamento de Economía **Matemáticas I Examen Final** **26 enero 2021**

Duración: 2 horas.

APELLIDOS:		**NOMBRE:**
ID:	**GRADO:**	**GRUPO:**

(1) **Sea la función** $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$**. Se pide:**

(a) Hallar las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

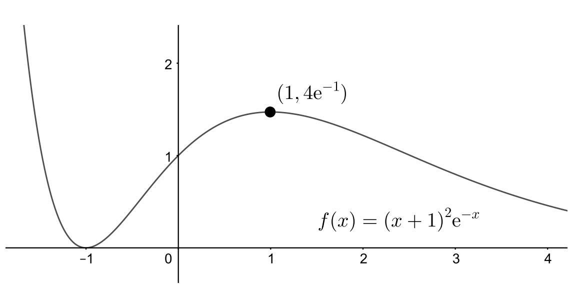
(b) Hallar los extremos globales y la imagen de $f(x)$. Representar la gráfica de la función.

(c) Considerar $f_1(x)$ la función $f(x)$ restringida al intervalo $[-1, 1]$.
Representar la gráfica de la inversa de $f_1(x)$.
(*Sugerencia para (c):* no intentar hallar explícitamente una fórmula para la inversa de f_1)
0,4 puntos apartado a); 0,4 puntos apartado b); 0,2 puntos apartado c)

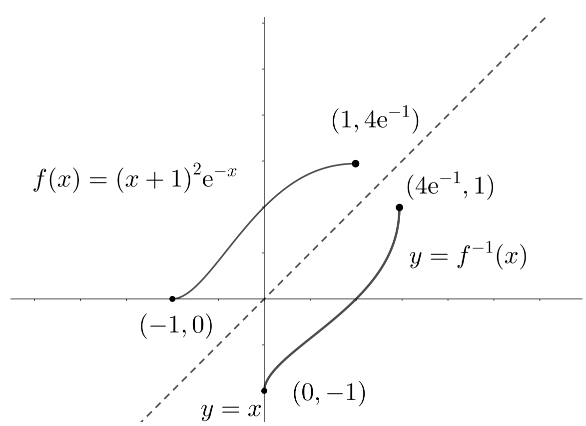
(a) El dominio de la función anterior es $\mathbb{R}$.
Como f es continua en su dominio, solo hay que estudiar las asíntotas en ∞ y en $-\infty$:
i) $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{(x+1)^2}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} =$ [por la regla de L'Hopital, aplicada 2 veces] $= \lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{2}{e^x} =$
$= \dfrac{2}{\infty} = 0$. Luego $f(x)$ tiene asíntota horizontal $y = 0$ en ∞.
ii) $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} \dfrac{(x+1)^2}{x} . \lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} e^{-x} = -\infty$, luego f no tiene asíntota ni horizontal ni oblicua en $-\infty$.
Como $f\,'(x) = e^{-x}(1-x^2)$, se deduce que f es creciente $\iff f\,'(x) > 0 \iff 1 - x^2 > 0$; luego f es creciente en $[-1, 1]$. Análogamente, f es decreciente en $(-\infty, -1]$ y en $[1, \infty)$.

(b) De lo anterior se deduce que -1 es un minimizador local y 1 es un maximizador local. Como $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f(x) = \infty$, se deduce que no existen maximizadores globales. Como $f(-1) = 0$ y $f(x) > 0$ (si $x \neq -1$), se deduce que -1 es el único minimizador global.
Finalmente, como $f(-1) = 0, f(x) \geqslant 0$ y $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f(x) = \infty$, por el teorema de los valores intermedios se deduce que la imagen será $[0, \infty)$.
Así pues, la gráfica de la función será, aproximadamente, como en la figura A.

(c) Como se puede apreciar, f_1 es creciente en $[-1, 1]$, $f_1(-1) = 0$, $f_1(1) = 4/e$. Luego la gráfica de su inversa será, aproximadamente, como en la figura B:



(A)



(B)

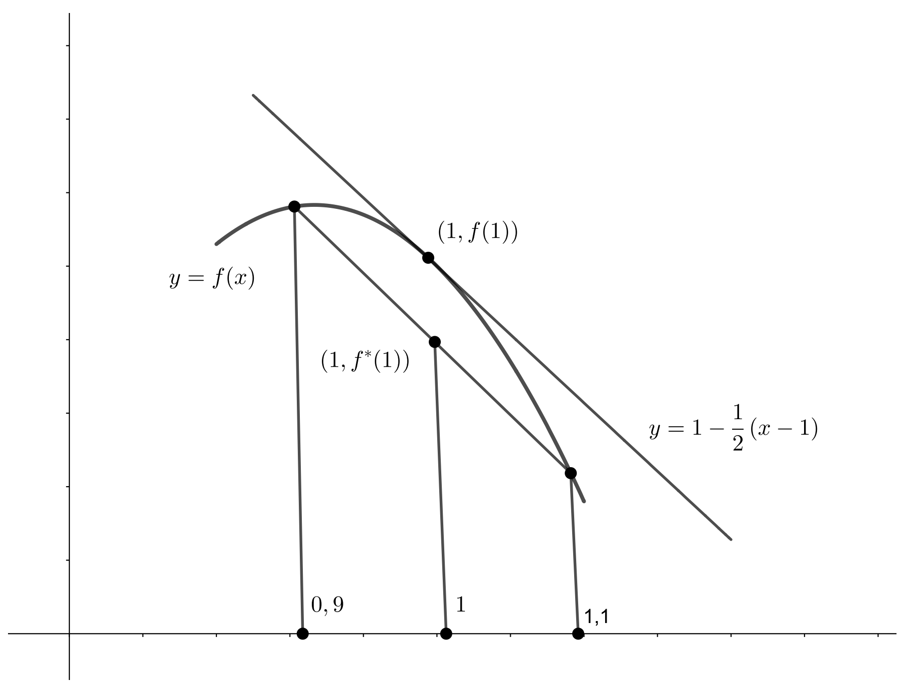
(2) **Dada la función $y = f(x)$, definida de forma implícita mediante la ecuación $e^x + ye^y = 2e$ en un entorno del punto $x = 1, y = 1$, se pide:**

(a) Hallar la recta tangente y el polinomio de Taylor de grado 2 de la función centrado en $a = 1$.

(b) Representar la gráfica de f cerca del punto $x = 1, y = 1$.
Calcular, utilizando la recta tangente, el valor aproximado de $f(0,9)$ y de $f(1,1)$.
¿Será $f(1)$ mayor, menor, o igual que el valor exacto de $\frac{1}{2}(f(0,9) + f(1,1))$?
Sugerencia para b: utilizar que $f''(1) < 0$.
0,5 puntos apartado a); 0,5 puntos apartado b)

(a) En primer lugar, calculamos la derivada primera de la función:
$e^x + y'e^y + yy'e^y = e^x + y'(y+1)e^y = 0$
sustituyendo $x = 1,\ y(1) = 1$ se deduce que $y'(1) = f\,'(1) = -1/2$.
Luego la ecuación de la recta tangente será: $y = P_1(x) = 1 - \frac{1}{2}(x-1)$. Análogamente, calculamos la derivada segunda de la función:
$e^x + y"(y+1)e^y + (y')^2e^y + y'(y+1)y'e^y = 0$
sustituyendo $x = 1, y(1) = 1, y'(1) = -1/2$ se deduce que $y''(1) = f''(1) = -7/8$.
Luego la ecuación del polinomio de Taylor de orden 2 será: $y = P_2(x) = 1 - \frac{1}{2}(x-1) - \frac{7}{16}(x-1)^2$

(b) Utilizando el polinomio de Taylor de orden 2, la gráfica de f, cerca del punto $x = 1$ será, aproximadamente, como se ve en la figura al final.
Por otro lado, utilizando la recta tangente, tenemos que:
$f(1,1) \approx 1 - \frac{1}{2}(0,1) = 0,95; f(0,9) \approx 1 - \frac{1}{2}(-0,1) = 1,05.$
Finalmente, como la función $f(x)$ es cóncava, $\frac{1}{2}(f(0,9) + f(1,1))$ será menor que $f(1)$, como se puede ver por la gráfica o, si se prefiere, calculando aproximadamente por el polinomio de Taylor de orden 2: $\frac{1}{2}(f(0,9) + f(1,1)) \approx 1 - \frac{7}{16}0,01$
Llamando $f^*(1) = \frac{1}{2}(f(0,9) + f(1,1))$, el dibujo quedaría así:



(3) **Sea $C(x) = C_0 + 50x + \frac{1}{2}x^2$ la función de costes y $p(x) = 710 - 5x$ la función inversa de demanda de una empresa monopolista. Se pide:**

(a) Determinar el precio p^* y la cantidad x^* en los cuales se alcanza el beneficio máximo.

(b) Hallar C_0 de modo que la cantidad obtenida en el apartado a) sea la misma que minimiza los costes medios.

0,5 puntos apartado a); 0,5 puntos apartado b)

(a) En primer lugar, calculamos la función de beneficios.
$B(x) = (710 - 5x)x - (C_0 + 50x + \frac{1}{2}x^2) = -\frac{11}{2}x^2 + 660x - C_0$
Si calculamos la primera y segunda derivada de B :
$B'(x) = -11x + 660;\ B''(x) = -11 < 0$
luego vemos que B tiene un único punto crítico en $x^* = \dfrac{660}{11} = 60$ y, como B es una función cóncava, este punto crítico es el único maximizador global.
Finalmente, $p^* = p(60) = 710 - 300 = 410$

(b) Como la función de costes medios es $\dfrac{C(x)}{x} = \dfrac{C_0}{x} + 50 + \frac{1}{2}x$,
su derivada será: $\left(\dfrac{C(x)}{x}\right)' = -\dfrac{C_0}{x^2} + \frac{1}{2} = 0 \Longleftrightarrow x^2 = 2C_0$.
Como $\left(\dfrac{C(x)}{x}\right)'' = \dfrac{2C_0}{x^3} > 0$, la función es convexa y el punto crítico será minimizador global.
Luego si $x^* = 60$ debe ser el minimizador, se cumplirá que
$60 = x^* = \sqrt{2C_0} \Longrightarrow C_0 = 1800$

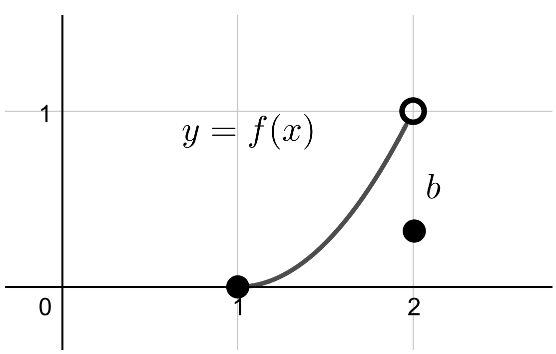
(4) **Sea** $f(x)=\begin{cases}(x+a)^2, & x<2\\ b, & x=2\\ -x^2+6x+1, & x>2\end{cases}$ definida a trozos en el intervalo $[1,3]$**. Se pide:**

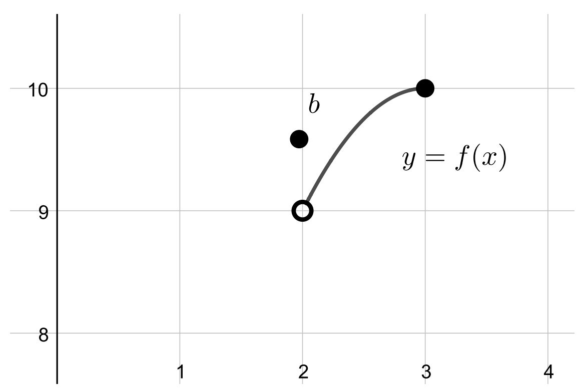
(a) Enunciar el teorema de Weierstrass para una función g definida en un intervalo I.
Determinar a y b para que $f(x)$ cumpla las hipótesis de dicho teorema.

(b) Supongamos que $a=-1$. ¿Para qué valores de b se cumple la tesis (o conclusión) de este teorema para el intervalo $[1,3]$?
¿Y para los intervalos $[1,2]$ o $[2,3]$?
0,4 puntos apartado a); 0,6 puntos apartado b)

(a) Las hipótesis son que g sea continua en un intervalo I cerrado y acotado.
La tesis, o conclusión, es que dicha función alcanzará un máximo y un mínimo.
Para ello, necesitamos imponer la continuidad de f en $x=2$.
Como $\lim\limits_{x\longrightarrow 2^+} f(x)=-4+12+1=b=f(2)\Longrightarrow b=9$.
Y como $\lim\limits_{x\longrightarrow 2^-} f(x)=(2+a)^2=9=f(2)\Longrightarrow a=-5$ o $a=1$.
Por tanto, se deduce que la función será continua en $[1,3]$ cuando: $b=9$ y ($a=-5$ o $a=1$).

(b) Para $a=-1$ no se cumplen las hipótesis de este teorema para el intervalo $[1,3]$.
Ahora bien, puede que sí se cumpla la conclusión en dicho intervalo, según los valores de b.
Observemos que f es creciente en $[1,2)$ y creciente en $(2,3]$, y que:
$0=f(1)<\lim\limits_{x\longrightarrow 2^-} f(x)=1<9=\lim\limits_{x\longrightarrow 2^+} f(x)<f(3)=10$.
Veamos los tres posibles casos según los valores que podría tomar b:
i) $b\leq 0\Longrightarrow \min f=b, \max f=10$.
ii) $0\leq b\leq 10\Longrightarrow \min f=0, \max f=10$.
iii) $10\leq b\Longrightarrow \min f=0, \max f=b$.
Luego para cualquier valor real de b se cumple el teorema de Weierstrass.
Ahora bien, para el caso del intervalo $[1,2]$ solo se cumple si $b\geqslant 1$, en cuyo caso $\min f=0, \max f=b$ pues, si $b<1$ el máximo no existe, como se puede ver en el dibujo inferior, a la izquierda.
Análogamente, para el caso del intervalo $[2,3]$ solo se cumple si $b\leq 9$, en cuyo caso $\min f=b$, $\max f=10$ pues, si $b>9$ el mínimo no existe, como se puede ver en el dibujo inferior, a la derecha.



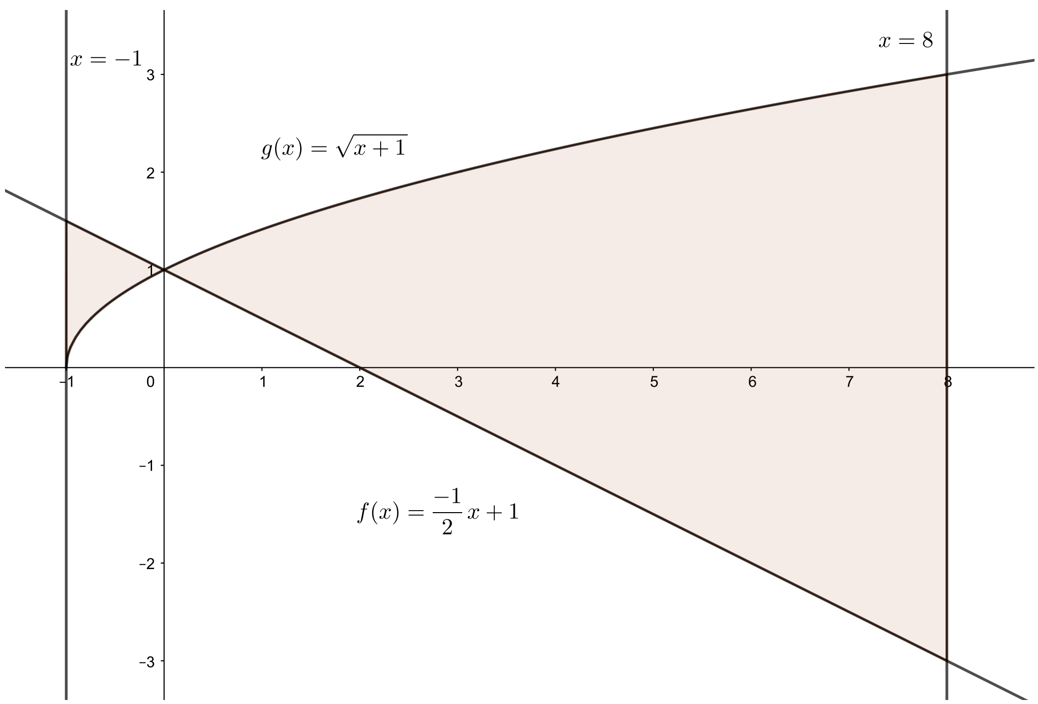


(5) **Dadas la funciones** $f, g : [-1, 8] \longrightarrow \mathbb{R}$, **definidas por:** $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$, $g(x) = \sqrt{x+1}$, **se pide:**

(a) Representar aproximadamente el conjunto A, delimitado por las gráficas de dichas funciones y las rectas $x = -1, x = 8$.
Hallar, si existen, los maximales y minimales, máximo y mínimo de A.

(b) Calcular el área del conjunto dado (expresando el resultado como la suma de un número entero y una fracción entre 0 y 1)
Sugerencia para a: el orden de Pareto viene dado por: $(x_0, y_0) \leq_P (x_1, y_1) \Longleftrightarrow x_0 \leq x_1, y_0 \leq y_1$.
0,6 puntos apartado a); 0,4 puntos apartado b)

(a) $f\ (x)$ es decreciente y $g(x)$ es creciente. Además, como $f(0) = g(0) = 1$, se cumple que:
i) $g(x) < f(x)$ si $-1 < x < 0$; y
ii) $f(x) < g(x)$ si $0 < x < 8$.
Por lo tanto, el dibujo de A será, aproximadamente, así



Así pues, el orden de Pareto nos describe al conjunto así: máximo(A) = maximales$(A) = (8, 3)$.
Por otra parte, como $g(-1) = 0 = f(2)$, se cumple que:
mínimo no existe, minimales$(A) = \{(-1, 0)\} \cup \{(x, f(x)) : 2 < x \leq 8\}$.

(b) En primer lugar, por la posición de las funciones, sabemos que:
área(A)=$\int_{-1}^{0} (f(x)-g(x))dx+\int_{0}^{8}(g(x)-f(x))dx = \int_{-1}^{0} (-\frac{1}{2}x+1-\sqrt{x+1})dx+\int_{0}^{8}(\sqrt{x+1}+\frac{1}{2}x-1)dx =$
(aplicando la regla de Barrow, obtenemos que)
$= [-\frac{1}{4}x^2 + x - \frac{2}{3}(x+1)^{3/2}]_{-1}^{0} + [\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + \frac{1}{4}x^2 - x]_0^8 =$
$= [-\frac{2}{3} - (-\frac{1}{4} - 1)] + [\frac{2}{3}9^{3/2} + \frac{1}{4}8^2 - 8 - \frac{2}{3}] = 25 + \frac{11}{12}$unidades de área.

(6) **Dada la función** $f(x) = \dfrac{3x+5}{x+1}$**, se pide:**

(a) Calcular $\int_0^1 f(t)dt$.

(b) Supongamos ahora que sustituimos $f(x)$ por una función convexa y decreciente $g(x)$ tal que $g(0) = 5$, $g(1) = 4$.
Hallar con esta información el mayor A_1 y el menor B_1 de forma que $A_1 < \int_0^1 g(x)dx < B_1$.

(c) Supongamos finalmente que $g(x)$ es una función convexa tal que $g(0) = 5$, $g(1) = 4$, $g'(1) = -\frac{1}{2}$.
Hallar $A_2 > A_1$ de forma que $A_2 < \int_0^1 g(x)dx$.
Sugerencia para b: dibujar $f(x)$ y el segmento que une los puntos $(0, f(0))$ con $(1, f(1))$.
Sugerencia para c: dibujar $f(x)$, su recta tangente en $x = 1$.
Estudiar para el caso c si la función será decreciente o no.
0,2 puntos apartado a); 0,4 puntos apartado b); 0,4 puntos apartado c).

(a) $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (3 + \frac{2}{x+1})dx = [3x + 2\ln(x+1)]_0^1 = 3 + 2\ln 2$.

(b) i) En primer lugar, como $g(x)$ es decreciente, $g(1) = 4 < g(x) \Longrightarrow 4 < \int_0^1 g(x)dx$. Luego $A_1 = 4$
ii) En segundo lugar, $g(x)$ queda por debajo del segmento que une los puntos $(0, 5)$ y $(1, 4)$.
La ecuación de esa recta es $y = 5 - x$, luego $\int_0^1 g(x)dx < 5 - \frac{1}{2} = 4 + \frac{1}{2}$.
La gráfica de $g(x)$, junto con el segmento citado se puede ver debajo a la izquierda. Luego $B_1 = 4 + \frac{1}{2}$

(c) i) en primer lugar, $g(x)$ es decreciente en $[0, 1]$, pues $g'(x)$ es creciente (por ser g convexa), luego si $x < 1 \Longrightarrow g'(x) < g'(1) < 0$.
ii) En segundo lugar, $g(x)$ queda por encima de la recta $y = g(1) + g'(1)(x-1) = 4 - \frac{1}{2}(x-1)$, tangente a $g(x)$ en $x = 1$.
Luego $\int_0^1 (4 - \frac{1}{2}(x-1))dx < \int_0^1 g(x)dx \Longrightarrow 4 + \frac{1}{4} < \int_0^1 g(x)dx$.
La gráfica de $g(x)$, junto con la recta tangente en $x = 1$ se puede ver debajo a la derecha. Siendo la solución $A_2 = 4 + \frac{1}{4}$