Universidad Carlos III de Madrid

Exercise	1	2	3	4	5	6	Total
Points							

Departamento de Economía **Matemáticas I (ADE) Examen Final** **10 enero 2020**

Duración: 2 horas.

APELLIDOS:		**NOMBRE:**
ID:	**GRADO:**	**GRUPO:**

(1) **Sea la función $f(x) = x^4 e^x$. Se pide:**

(a) Hallar el dominio y las asíntotas de $f(x)$.

(b) Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos globales e imagen.

(c) Representar la gráfica de la función.

0,3 puntos apartado a); 0,5 puntos apartado b); 0,2 puntos apartado c)

---

a) El dominio de la función anterior es $\mathbb{R}$.

Como f es continua en su dominio, solo hay que estudiar las asíntotas en ∞ y en $-\infty$:

i) $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} \dfrac{x^4}{e^{-x}} = \frac{\infty}{\infty} =$ [por la regla de L'Hopital, aplicada 4 veces] $=$

$= \lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} \dfrac{24}{e^{-x}} = \dfrac{24}{\infty} = 0.$

Luego $f(x)$ tiene asíntota horizontal $y = 0$ en $-\infty$.

ii) $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\longrightarrow\infty} x^3 e^x = \infty$, luego f no tiene asíntota ni horizontal ni oblicua en ∞.

b) Como $f\,'(x) = e^x(x^4 + 4x^3)$, se deduce que : f es creciente $\Longleftrightarrow f\,'(x) > 0 \Longleftrightarrow x^4 + 4x^3 = x^3(x + 4) > 0$; luego f es creciente en $(-\infty, -4]$ y en $[0, \infty)$. Análogamente, f es decreciente en $[-4, 0]$.

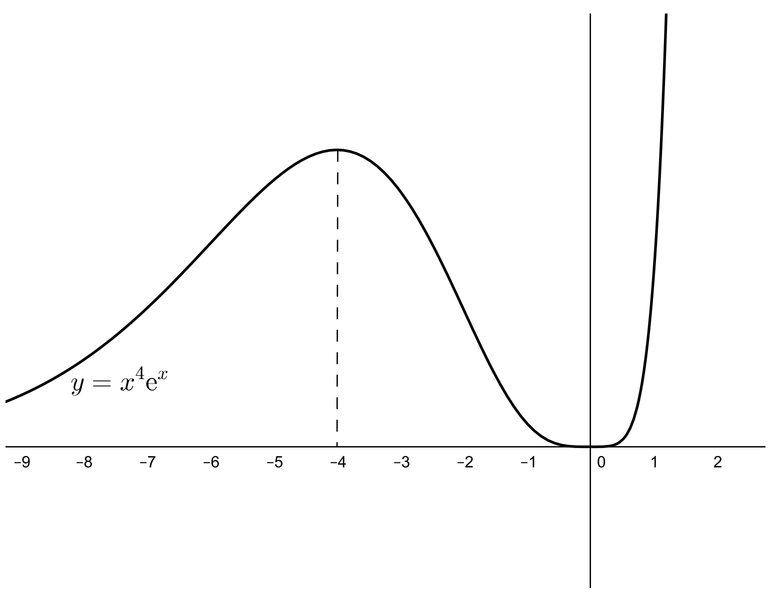
De lo anterior se deduce que -4 es un maximizador local y 0 es un minimizador local.

Como $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} f(x) = \infty$, se deduce que no existen maximizadores globales.

Como $f(0) = 0, f(x) \geq 0$, se deduce que 0 es el único minimizador global.

Finalmente, como $f(0) = 0, f(x) \geq 0$ y $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} f(x) = \infty$, por el teorema de los valores intermedios se deduce que la imagen será $[0, \infty)$.

c) Así pues, la gráfica de la función será, aproximadamente, así:



(2) **Dada la función** $y = f(x)$, **definida de forma implícita mediante la ecuación** $2x+2y-e^{y-x} = -1$ **en un entorno del punto** $x = 0, y = 0$, **se pide:**

(a) Hallar la recta tangente y el polinomio de Taylor de grado 2 de la función centrado en $a = 0$.

(b) Representar la gráfica de f cerca del punto $x = 0, y = 0$. Representar la gráfica de f^{-1} cerca del punto $x = 0, y = 0$, utilizando la recta tangente a la gráfica de f^{-1} en el punto $x = 0, y = 0$ y discutiendo la concavidad o convexidad de f^{-1}.

Sugerencia para b: utilizar la simetría entre f y f^{-1}.

0,5 puntos apartado a); 0,5 puntos apartado b)

---

a) En primer lugar, calculamos la derivada primera de la función: $2+2y'-e^{y-x}(y'-1) = 0$ sustituyendo $x = 0,\ y(0) = 0$ se deduce que $y'(0) = f\ '(0) = -3$.

Luego la ecuación de la recta tangente será: $y = P_1(x) = 0 - 3(x - 0) = -3x$.

Análogamente, calculamos la derivada segunda de la función: $2y" - e^{y-x}[(y' - 1)^2 + y''] = 0$ sustituyendo $x = 0, y(0) = 0, y'(0) = -3$ se deduce que $y''(0) = f\ ''(0) = 16$.

Luego la ecuación del polinomio de Taylor será: $y = P_2(x) = 0 - 3x + 8x^2$

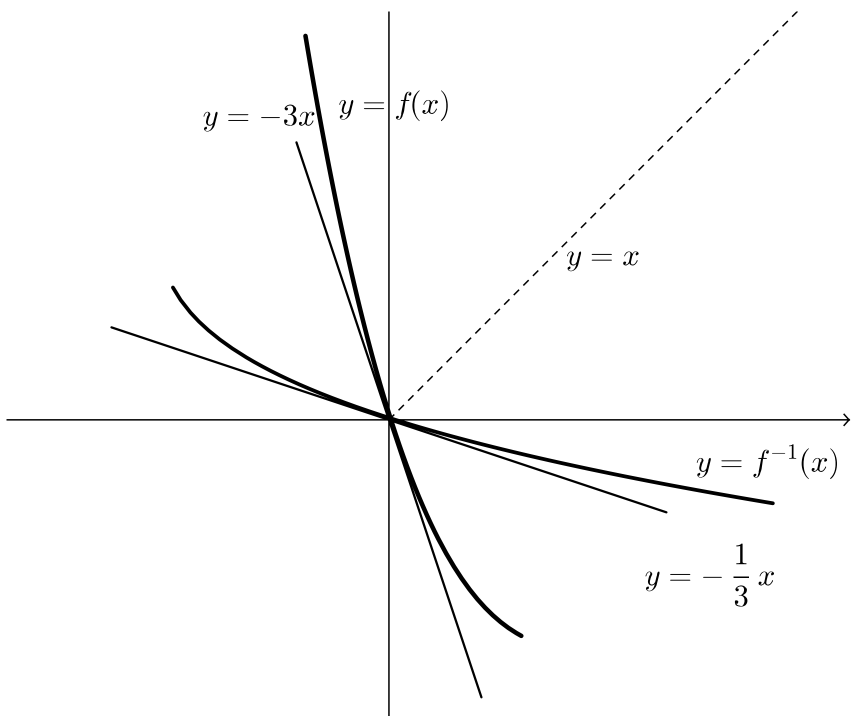
b) Utilizando el polinomio de Taylor de orden 2, la gráfica de f, cerca del punto $x = 0$ será, aproximadamente, como se ve en la figura al final.

Por otro lado, $(f^{-1})'(0) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \dfrac{1}{f'(0)} = -\frac{1}{3}$.

Luego la recta tangente a f^{-1} en $x = 1$ será: $y = -\frac{1}{3}x$.

Como f es convexa y decreciente cerca del punto $x = 0$, por simetría se deduce que f^{-1} será también convexa (y decreciente) cerca del punto $x = 0$.

Por lo tanto, la gráfica de f^{-1} cerca del punto $x = 0$ será, aproximadamente, como se ve en la figura al final.



(3) **Sea $C(x) = 75 + 80x - x^2$ la función de costes y $p(x) = 200 - 3x$ la función inversa de demanda de una empresa monopolista, siendo $0 \leq x \leq 40$ el número de unidades producidas de cierta mercancía. Se pide:**

(a) Determinar el precio p^* y la cantidad x^* en los cuales se alcanza el beneficio máximo.

(b) Si el gobierno incrementa los costes por medio de una tasa de T euros por unidad producida, determinar la nueva cantidad $x^*(T)$ y el nuevo precio $p^*(T)$ que maximizan el beneficio de la compañía.

Comparar los resultados con el caso anterior.

0,5 puntos apartado a); 0,5 puntos apartado b)

---

a) En primer lugar, calculamos la función de beneficios.
$B(x) = (200 - 3x)x - (75 + 80x - x^2) = -2x^2 + 120x - 75$
Si calculamos la primera y segunda derivada de B :
$B'(x) = -4x + 120; B''(x) = -4 < 0$
deducimos que B tiene un único punto crítico en $x^* = \dfrac{120}{4} = 30$ y, como B es una función cóncava, este punto crítico es el único maximizador global.
Finalmente, $p^* = p(30) = 200 - 90 = 110$ euros.

b) Como la nueva función de costes es $C(x) = 75 + (80 + T)x - x^2$, la nueva función de beneficios será $B(x) = -2x^2 + (120 - T)x - 75$.
Como $B'(x) = -4x + 120 - T; B''(x) = -4 < 0$,
luego vemos que B tiene un único punto crítico en $x^*(T) = \dfrac{120 - T}{4} = 30 - \dfrac{T}{4}$.
Como B es una función cóncava, el punto crítico es el único maximizador global.
Finalmente, $p^*(T) = 200 - 3(30 - \dfrac{T}{4}) = 110 + 3\dfrac{T}{4}$ euros.
Como se puede ver, la cantidad producida ha disminuido y los precios han aumentado.

(4) **Sea** $f(x) = \begin{cases} x^2+6x+a & si\ x \le 1 \\ bx+2 & si\ \ x > 1 \end{cases}$ **definida a trozos en el intervalo** $[0,2]$**. Se pide:**

(a) Determinar a y b para que $f(x)$ cumpla la hipótesis del teorema del valor medio (o de Lagrange).

(b) Para los valores $a = 2, b = 8$, ¿se cumplen las hipótesis de este teorema? ¿Existe(n) el valor o valores c de forma que se cumpla la tesis (o conclusión) del teorema de Lagrange (o del valor medio)?

Sugerencia para parte b): caso de que existan varios valores c, no es necesario calcularlos todos.

0,5 puntos apartado a); 0,5 puntos apartado b)

---

a) Las hipótesis de dicho teorema son que f sea continua en $[0,2]$ y derivable en $(0,2)$.
Para ello, necesitamos imponer la continuidad y derivabilidad de f en $x = 1$.
Como $\lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = 7 + a = f(1)$, $\lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = b + 2$
se deduce que la función será continua en dicho punto cuando: $7 + a = b + 2$.
Por otro lado, suponiendo que la función sea continua en $x = 1$, será derivable en dicho punto si:
$8 = f\,'_-(1) = f\,'_+(1) = b$.
Luego la función será continua y derivable en $x = 1$ cuando:
$7 + a = b + 2, 8 = b \Longleftrightarrow a = 3, b = 8$.
Por tanto, se cumplen las hipótesis del teorema de Lagrange cuando $a = 3, b = 8$.

b) Para los valores $a = 2, b = 8$ no se cumplen las hipótesis de este teorema, pues f no es derivable en el punto $x = 1$, pues no es continua en dicho punto. Ahora bien, puede suceder que sí se cumpla la tesis del citado teorema de Lagrange, es decir, que:
(*) existe(n) $c \in (0,2) : f(2) - f(0) = f\,'(c)(2-0)$.
Teniendo en cuenta que $a = 2, b = 8 \Longrightarrow f(2) = 18,\ f(0) = 2$,
(*) equivale a que existe(n) $c \in (0,2) : 18 - 2 = 2f\,'(c)$. O bien: $f\,'(c) = 8$.
Luego todos los $c \in (1,2)$ satisfacen la conclusión de este teorema.

(5) **Dadas la funciones** $f, g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ **definidas por:** $f(x) = -\ln(1+x), g(x) = 5 - e^x$, **se pide:**

(a) Representar aproximadamente el conjunto $A = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, f(x) \leq y \leq g(x)\}$ y hallar, si existen, los maximales y minimales, máximo y mínimo de A.

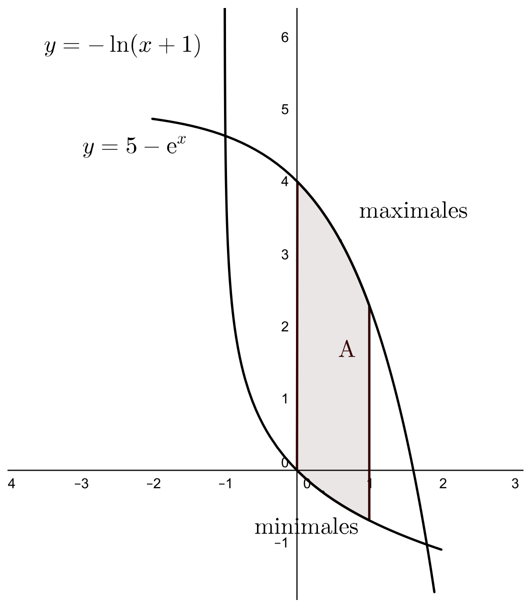
(b) Calcular el área del conjunto dado.

Sugerencia para a: el orden de Pareto viene dado por: $(x_0, y_0) \leq_P (x_1, y_1) \iff x_0 \leq x_1, y_0 \leq y_1$.

0,6 puntos apartado a); 0,4 puntos apartado b)

---

a) Tanto $f\ (x)$ como $g(x)$ son decrecientes en su dominio, pues ambas derivadas son negativas. Además, para cualquier x entre 0 y 1, se cumple:
i) $f(x) \leq 0$ siempre, pues $f(0) = 0$; y
ii) $0 < g(x)$ siempre, pues $g(1) > 0$
Por lo tanto, el dibujo de A será, aproximadamente, así:



Así pues, el orden de Pareto nos describe al conjunto así:
máximo no existe, maximales$(A) = \{(x, g(x)) : 0 \leq x \leq 1\}$.
mínimo no existe, minimales$(A) = \{(x, f(x) : 0 \leq x \leq 1\}$.

b) En primer lugar, hallamos una primitiva de la función f integrando por partes:
$\int 1.(-\ln(x+1)) = \int u'v = uv - \int uv' = x(-\ln(x+1)) - \int x\dfrac{(-1)}{x+1} = -x\ln(x+1) + \int \dfrac{x}{x+1} = x\ln(x+1) + \int \dfrac{x+1}{x+1} - \int \dfrac{1}{x+1} = -x\ln(x+1) + x - \ln(x+1) = x - (x+1)\ln(x+1)$
Por tanto, aplicando la regla de Barrow, obtenemos que:
$\int_0^1 (g(x) - f(x))dx = [5x - e^x - x + (x+1)\ln(x+1)]_0^1 = (5 - e - 1 + 2\ln(2)) - (-1) = 5 - e + 2\ln(2) = 5 - e + \ln(4)$ unidades de área.

(6) **Dada la función** $g(x) = \dfrac{10-4x}{2+x^3}$**, se pide:**

(a) Probar que $\int_0^2 g(t)dt$ está comprendido entre $2,2$ y 7.

(b) Representar la función $G(x) = \int_0^x g(t)dt$ definida en el intervalo $[0,2]$, hallando sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos globales, intervalos de concavidad, convexidad y puntos de inflexión.

Sugerencia para a y b: probar que $g(x)$ es decreciente.

0,6 puntos apartado a); 0,4 puntos apartado b)

---

a) Como $g(x)$ es decreciente en $[0,2]$, pues el numerador es decreciente y el denominador es creciente, y ambos son positivos, se deduce que:
$g(1) + g(2) < \int_0^2 g(t)dt < g(0) + g(1)$.
Y como $g(0) = 5, g(1) = 2, g(2) = 0,2$ se prueba la afirmación.

b) i) $G(x)$ es creciente en $[0,2]$, pues su derivada es $g(x) > 0$.
ii) $G(x)$ es cóncava en $[0,2]$, pues su derivada es $g(x)$, que es decreciente.
Por lo tanto, su mínimo global lo alcanza en el punto $x = 0$. En cuanto al máximo, lo alcanza en el punto $x = 2$.
Además, $G(x)$ no tiene puntos de inflexión.
Así pues, la gráfica de $G(x)$ será, aproximadamente, así: