Universidad Carlos III de Madrid

Ejercicio	1	2	3	4	5	6	Total
Puntos							

Departmento de Economía **Matematicas I Examen Final** **16 enero 2019**

Duración: 2 horas.

APELLIDOS:		**NOMBRE:**
ID:	**GRADO:**	**GRUPO:**

(1) **Sea la función** $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$**. Se pide:**

(a) Hallar el dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos globales e imagen de f.

(b) Estudiar la concavidad o convexidad de la función. Representar gráficamente la función y sus asíntotas.

0,6 puntos apartado a); 0,4 puntos apartado b)

---

a) El dominio de la función anterior es $\{x : x^2 - x = x(x-1) \geq 0\} = (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$.

Como f es continua en su dominio, que es la unión de intervalos cerrados, solo hay que estudiar las asíntotas en ∞ y en $-\infty$:

i) $\lim\limits_{x \longrightarrow \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \longrightarrow \pm\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - x}}{\pm\sqrt{x^2}} = \pm \lim\limits_{x \longrightarrow \pm\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x}} = \pm 1.$

ii) $\lim\limits_{x \longrightarrow \pm\infty} [f(x) - \pm\, x] = \lim\limits_{x \longrightarrow \pm\infty} [\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{x^2}] =$ [Y ahora, racionalizando:]

$= \lim\limits_{x \longrightarrow \pm\infty} [\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{x^2}][\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2}]/[\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2}] =$

$= \lim\limits_{x \longrightarrow \pm\infty} \dfrac{x^2 - x - x^2}{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2}} = -\lim\limits_{x \longrightarrow \pm\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2}} =$

[dividiendo numerador y denominador por $x = \sqrt{x^2}$]

$= -\lim\limits_{x \longrightarrow \pm\infty} \dfrac{\pm 1}{\sqrt{1 - 1/x} + 1} = \mp \frac{1}{2};$

iii) luego f tiene asíntota oblicua $y = x - \frac{1}{2}$ en ∞ e $y = -x + \frac{1}{2}$ en $-\infty$.

.

Por otra parte, como $f\,'(x) = \dfrac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x}}$, se deduce que :

f es creciente $\Longleftrightarrow f\,'(x) > 0 \Longleftrightarrow 2x - 1 > 0$; luego f creciente en $[1, \infty)$.

Análogamente, f es decreciente en $(-\infty, 0]$.

Como $f(0) = f(1) = 0, f(x) \geq 0$, se deduce que 0 y 1 son los minimizadores globales y, como $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \infty$, se deduce que no existen maximizadores globales.

Finalmente, como $f(1) = 0, f(x) \geq 0$ y $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \infty$, por el teorema de los valores intermedios se deduce que la imagen será $[0, \infty)$.

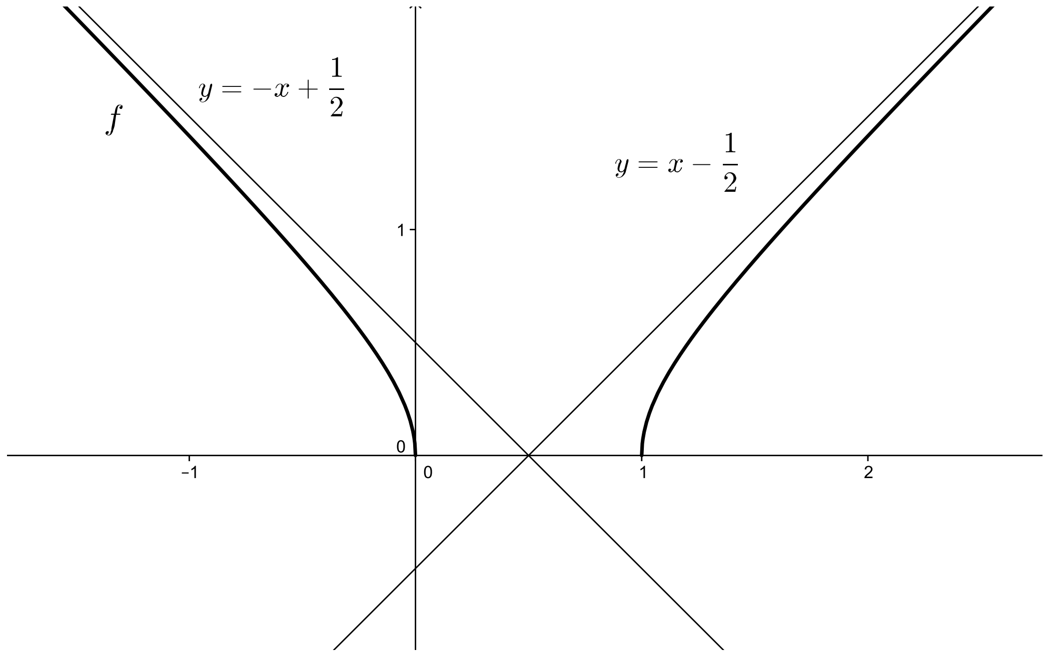
b) Como $f\,''(x) = \left(\dfrac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x}}\right)' = \dfrac{4\sqrt{x^2 - x} - (2x-1)^2/\sqrt{x^2 - x}}{4(x^2 - x)} < 0$, ya que dicha desigualdad es equivalente a :

$4\sqrt{x^2 - x} < (2x-1)^2/\sqrt{x^2 - x} \Longleftrightarrow 4(x^2 - x) < (2x-1)^2 \Longleftrightarrow 0 < 1.$

Por lo tanto, dicha función es cóncava en $(-\infty, 0]$ y en $[1, \infty)$,

luego las asíntotas en $\pm\infty$ quedan por encima de la gráfica.

Así pues, la gráfica de la función será, aproximadamente, así:


f
$y = -x + \frac{1}{2}$
$y = x - \frac{1}{2}$
1
0
-1
0
1
2

(2) **Dada la función $y = f(x)$, definida de forma implícita mediante la ecuación $ye^{-x} - y^3 - 3x = 0$ en un entorno del punto $x = 0, y = 1$, se pide:**

(a) Hallar la recta tangente y el polinomio de Taylor de grado 2 de la función centrado en $a = 0$.

(b) Representar la gráfica de f cerca del punto $x = 0, y = 1$. Representar la gráfica de f^{-1} cerca del punto $x = 1, y = 0$, utilizando la recta tangente a la gráfica de f^{-1} en el punto $x = 1, y = 0$ y discutiendo la concavidad o convexidad de f y f^{-1}.

(*Sugerencia* para b: utilizar la simetría entre f y f^{-1}.)

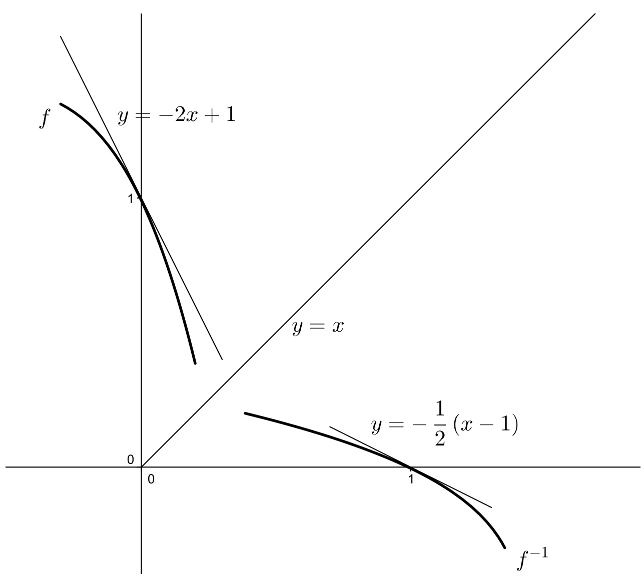
1 punto

---

a) En primer lugar, calculamos la derivada primera de la función:
$y'e^{-x} - ye^{-x} - 3y^2y' - 3 = (y' - y)e^{-x} - 3[y^2y' + 1] = 0$
sustituyendo $x = 0,\ y(0) = 1$ se deduce que $y'(0) = f\,'(0) = -2$.
Luego la ecuación de la recta tangente será: $y = P_1(x) = 1 - 2(x - 0) = 1 - 2x$.

Análogamente, calculamos la derivada segunda de la función:
$(y" - y')e^{-x} - (y' - y)e^{-x} - 3[2y(y')^2 + y^2y"] = 0$
sustituyendo $y(0) = 1, y'(0) = -2$ se deduce que $y"(0) = f\,"(0) = -\frac{19}{2}$.
Luego la ecuación del polinomio de Taylor será: $y = P_2(x) = 1 - 2x - \frac{19}{4}x^2$
.

b) Utilizando el polinomio de Taylor de orden 2, la gráfica de f, cerca del punto $x = 0$ será, aproximadamente, como se ve en la parte izquierda de la figura al final.
Por otro lado, $(f^{-1})'(1) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(1))} = \dfrac{1}{f'(0)} = -\frac{1}{2}$.
Luego la recta tangente a f^{-1} en $x = 1$ será: $y - 0 = (-\frac{1}{2})(x - 1)$.
Como f es cóncava y decreciente cerca del punto $x = 0$, por simetría se deduce que f^{-1} será cóncava (y decreciente) cerca del punto $x = 1$.
Por lo tanto, la gráfica de f^{-1} cerca del punto $x = 1$ será, aproximadamente, como se ve en la parte derecha de la figura al final.



(3) **Sea $C(x) = 4000 - 40x + 0,02x^2$ la función de costes y $p(x) = 50 - 0,01x$ la función inversa de demanda de una empresa monopolista, siendo $x \geqslant 0$ el número de unidades producidas de cierta mercancía. Se pide:**

(a) Determinar el precio p^* y la cantidad x^* en los cuales se alcanza el beneficio máximo.

(b) Determinar los ingresos marginales en el punto x^*. Justificar si dicho valor aproxima la variación de ingresos que se obtienen al vender una unidad más o menos que x^*, así como si dicha aproximación es por defecto o por exceso.

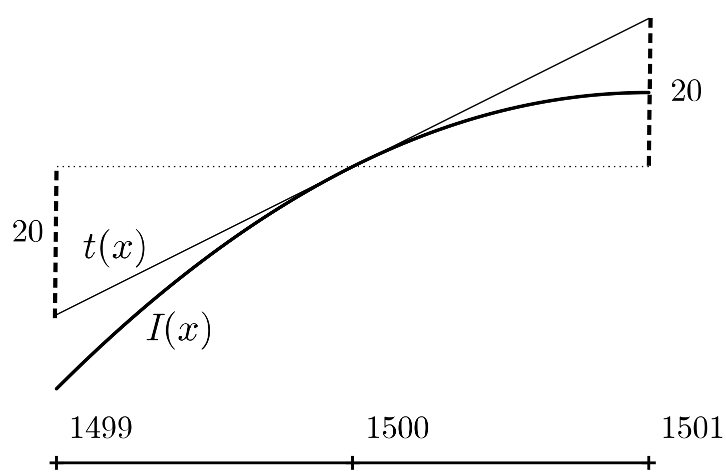
(*Sugerencia:* recuerda que $I(x) = p(x)x$ y que $I'(x)$ son los ingresos marginales)

0,5 puntos apartado a); 0,5 puntos apartado b)

---

a) En primer lugar, calculamos la función de beneficios.
$B(x) = (50 - 0,01x)x - (4000 - 40x + 0,02x^2) = -0,03x^2 + 90x - 4000$
Si calculamos la primera y segunda derivada de B :
$B'(x) = -0,06x + 90; B"(x) = -0,06 < 0$
luego vemos que B tiene un único punto crítico en $x^* = \dfrac{90}{0,06} = 1500$ y, como B es una función cóncava, este punto crítico es el único maximizador global.
Finalmente, $p^* = p(1500) = 50 - 0,01.1500 = 35$

b) Como la función de ingresos es $I(x) = (50 - 0,01x)x$, la función de ingresos marginales es $I'(x) = 50 - 0,02x$.
Luego $I'(1500) = 20$. Aplicando el teorema del valor medio, existe $c^- \in (1499, 1500)$ y $c^+ \in (1500, 1501)$ tales que:
i) $I(1500) - I(1499) = I'(c^-).(1500 - 1499) \approx I'(1500) = 20.$
ii) $I(1501) - I(1500) = I'(c^+).(1501 - 1500) \approx I'(1500) = 20$.
Y, como dicha función de ingresos marginales es cóncava, pues $I"(x) < 0$, se deduce que, al ser $I'(x)$ decreciente:
i) la reducción de ingresos al producir una unidad menos será:
$I(1500) - I(1499) = I'(c^-) > I'(1500) = 20$, o sea mayor de 20 unidades monetarias; y
ii) el aumento de ingresos al producir una unidad más será:
$I(1501) - I(1500) = I'(c^+) < I'(1500) = 20$, o sea, menor de 20 unidades monetarias.
El dibujo siguiente aclarará la situación donde $t(x)$ es la recta tangente a $I(x)$ en $x = 1500$:



(4) **Sea** $f(x) = \begin{cases} 1+ax^2 & si\ x < -1 \\ abx & si\ \ x \geqslant -1 \end{cases}$ **definida a trozos en el intervalo** $[-3,1]$**. Se pide:**

(a) Determinar a y b para que $f(x)$ cumpla la hipótesis del teorema del valor medio (o de Lagrange).

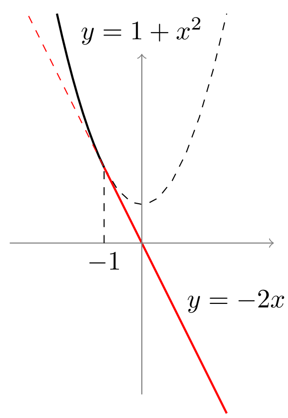
(b) Para los valores $a=-1, b=-1$, determinar el valor o valores intermedio(s) c de forma que se cumpla la tesis (o conclusión) del teorema de Lagrange (o del valor medio) aunque no se cumpla la hipótesis.

(*Sugerencia para los apartados a y b*: enunciar el teorema del valor medio.)

0,5 puntos apartado a); 0,5 puntos apartado b)

---

a) Las hipótesis de dicho teorema son que f sea continua en $[-3,1]$ y derivable en $(-3,1)$.
Para ello, necesitamos imponer la continuidad y derivabilidad de f en $x=-1$.
Como $\lim_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = 1+a$, $f(-1) = \lim_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = -ab$
se deduce que la función será continua en dicho punto cuando: $1+a=-ab$.
Por otro lado, suponiendo que la función sea continua en $x=-1$,
será derivable en dicho punto si: $-2a = f\ '_-(-1) = f\ '_+(-1) = ab$.
Luego la función será continua y derivable en $x=-1$ cuando:
$1+a=-ab, -2a=ab \Longrightarrow$
i) si $a=0$, la primera ecuación no se cumple; y
ii) si $a \neq 0$, de la segunda ecuación se deduce que $b=-2$ y de la primera que $a=1$.
Luego se cumplen las hipótesis del teorema de Lagrange cuando $a=1, b=-2$.. La gráfica de dicha función es la siguiente:



b) Si se cumpliera la tesis del teorema de Lagrange, tendríamos que:
(*) Existe $c \in (-3,1) : f(1) - f(-3) = f\ '(c)(1-(-3))$.
Teniendo en cuenta que $a=-1, b=-1 \Longrightarrow f(1)=1,\ f(-3)=-8$
luego (*) equivale a que $1-(-8) = f\ '(c)4$. O bien: $f\ '(c) = 9/4$.
i) Cuando $-3 < x < -1$, entonces $f\ '(x) = -2x$, luego
$f\ '(c) = -2c = 9/4 \Longleftrightarrow c = -9/8$.
ii) Cuando $-1 < x < 1$, entonces $f\ '(x) = 1 \neq 9/4$;
luego $c=-9/8$ es el único valor que cumple el teorema de Lagrange.

(5) **Dadas la funciones $f, g : [0,3] \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por: $f(x) = -e^x, g(x) = \ln(4-x)$ se pide:**

(a) Representar aproximadamente el conjunto $A = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 3, f(x) \leq y \leq g(x)\}$ y hallar, si existen, los maximales y minimales, máximo y mínimo de A.

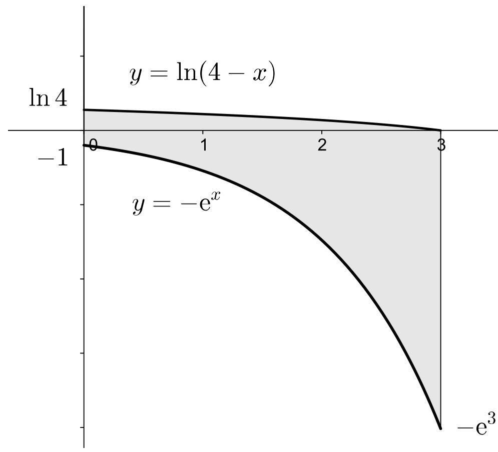
(b) Calcular el área del conjunto dado.

(*Sugerencia para a*: el orden de Pareto viene dado por: $(x_0, y_0) \leq_P (x_1, y_1) \Longleftrightarrow x_0 \leq x_1, y_0 \leq y_1$.)

0,6 puntos apartado a); 0,4 puntos apartado b)

---

a) Tanto $f\ (x)$ como $g(x)$ son decrecientes en su dominio, pues ambas derivadas son negativas.
Por lo tanto, el dibujo de A será, aproximadamente, así:



Por lo tanto, el orden de Pareto nos describe al conjunto así:
máximo no existe, maximales$(A) = \{(x, g(x)) : 0 \leq x \leq 3\}$.
mínimo no existe, minimales$(A)\} = \{(x, f(x) : 0 \leq x \leq 3\}$.

b) En primer lugar, hallamos una primitiva de la función g integrando por partes:

$\int 1. \ln(4-x) = \int h'g = hg - \int hg' = x\ln(4-x) - \int x\dfrac{(-1)}{4-x} = x\ln(4-x) - \int \dfrac{4-x-4}{4-x} =$

$= x\ln(4-x) - \int \dfrac{4-x}{4-x} - 4\int \dfrac{(-1)}{4-x} = x\ln(4-x) - x - 4\ln(4-x) = (x-4)\ln(4-x) - x$

Por tanto, aplicando la regla de Barrow, obtenemos que:

$\int\limits_0^3 (g(x) - f(x))dx = [(x-4)\ln(4-x) - x + e^x]_0^3 = (-3 + e^3) - (-4\ln 4 + 1) =$

$= 4(\ln 4 - 1) + e^3$ unidades de área.

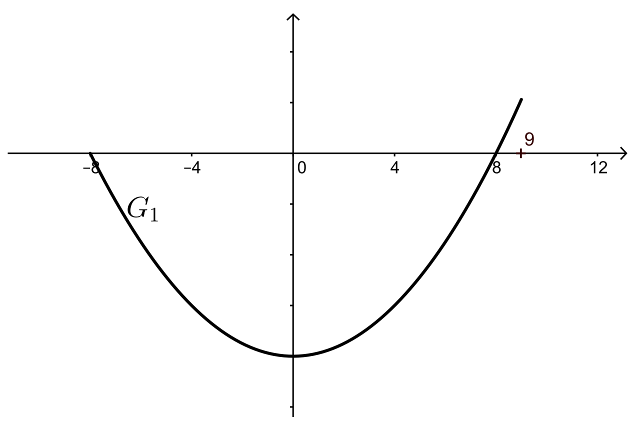
(6) **Dada la función** $g(x) = \dfrac{x}{10 + x^6}$, **se pide:**

(a) Representar la función $G_1(x) = \int_{-8}^{x} g(t)dt$ definida en el intervalo $[-8, 9]$, hallando sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos globales.

(b) Sea ahora G_2 una función tal que $G_2'(x) = g(x)$ y $G_2(0) = 0$.
Encuentra el polinomio de Taylor de segundo orden de $G_2(x)$ en $a = 0$. Úsalo para calcular aproximadamente el área limitada por el eje horizontal, la gráfica de $g(x)$ y las rectas verticales $x = 0, x = 0,1$.
(*Sugerencia* para a y b: no intentar hallar una fórmula para G_1 o G_2.)
0,6 puntos apartado a); 0,4 puntos apartado b)

---

a) Como $G_1'(x) = \dfrac{x}{10 + x^6}$, se deduce que:
i) $G_1(x)$ es decreciente en $[-8, 0]$, pues su derivada es negativa.
ii) $G_1(x)$ es creciente en $[0, 9]$, pues su derivada es positiva.
Por lo tanto, su mínimo global lo alcanza en el punto $x = 0$.
En cuanto al máximo, como $g(x)$ es una función impar, se cumple que $\int_{-8}^{8} g(t)dt = 0$.
Luego $G_1(-8) = 0 = G_1(8) < G_1(9)$, pues $G_1(x)$ es creciente en $[0, 9]$.
Luego el máximo global lo alcanza en el punto $x = 9$.
Así pues, la gráfica de $G_1(x)$ será, aproximadamente, así:
.



b) Dicha área es $\int_0^{0,1} g(t)dt = G_2(0,1)$.
Como $G_2'(x) = g(x)$, se deduce que $G_2'(0) = 0$.
Como $G_2''(x) = g'(x) = (\dfrac{x}{10 + x^6})' = \dfrac{10 + x^6 - 6x^6}{(10 + x^6)^2}$, se deduce que $G_2''(0) = \frac{1}{10}$.
Por lo tanto, el polinomio de Taylor de $G_2(x)$ será: $P_2(x) = \frac{1}{20}x^2$.
Luego el valor aproximado de dicha área, será: $P_2(0,1) = \frac{1}{20}0,1^2 = \frac{1}{2000}$.