Universidad Carlos III de Madrid

Exercise	1	2	3	4	5	6	Total
Points							

Departmento de Economía **Mathematicas I Examen Final** **22 enero 2018**

Duración: 2 horas.

APELLIDOS:	**NOMBRE:**
ID: **GRADO:**	**GRUPO:**

(1) **Sea la función** $f(x) = \ln(x) + \dfrac{1}{(x-2)}$**. Se pide:**

(a) Representar gráficamente la función, calculando previamente su dominio, asíntotas verticales, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos locales y globales e imagen de $f(x)$.

(b) Sea la función $f_1(x) = f(x)$, definida solo en el intervalo $[4, \infty)$. Dibujar las gráficas de $f_1(x)$, su inversa y la diagonal principal, indicando claramente sus posiciones relativas.

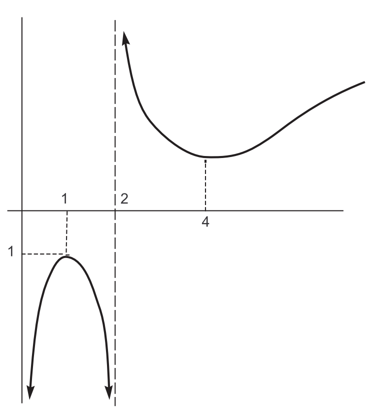
Sugerencia: a partir de $f_1(4)$ y de $f_1{}'(x)$ se puede hallar la posición relativa de $f_1(x)$ y la diagonal principal. Usar que $\ln 4 < 2$. No intentar hallar la expresión analítica de $f_1^{-1}(x)$.

0,6 puntos apartado a); 0,4 puntos apartado b)

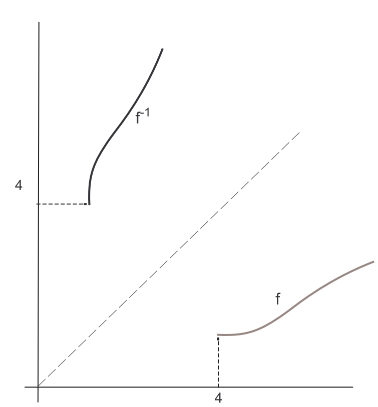
---

a) El dominio de la función anterior es $\{x : x > 0, x \neq 2\} = (0,2) \cup (2,\infty)$. Como la función es continua en su dominio, solo hay que estudiar las posibles asíntotas verticales en $0^+, 2^-$ y en 2^+ :
$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \ln(0^+) - \frac{1}{2} = -\infty - \frac{1}{2} = -\infty$; luego la función tiene asíntota vertical en $x = 0^+$.
$\lim_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = \ln(2) + \frac{1}{0^-} = \ln 2 - \infty = -\infty$; luego la función tiene asíntota vertical en $x = 2^-$.
$\lim_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = \ln(2) + \frac{1}{0^+} = \ln 2 + \infty = \infty$; luego la función tiene asíntota vertical en $x = 2^+$.
Por otra parte, como $f\,'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{(x-2)^2}$, se deduce que : f es creciente $\iff f\,'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{(x-2)^2} > 0 \iff x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4) > 0, x \neq 2$; luego f creciente en $(0,1]$ y en $[4,\infty)$ y decreciente en $[1,2)$ y en $(2,4]$
De lo anterior se deduce que f alcanza un máximo local en $x = 1$ y un mínimo local en $x = 4$.
Por lo tanto, como $\lim_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = \infty$, la función no alcanza ningún extremo global.
Por último, como la función es continua en los intervalos $(0,2)$ y en $(2,\infty)$, por el teorema de los valores intermedios, la imagen será $(-\infty,\ f(1)] \cup [f(4), \infty) = (-\infty, -1] \cup [\frac{1}{2} + \ln 4, \infty)$.
Conclusión: la gráfica de f tendrá un apariencia, aproximadamente, como la figura A:

b) Como $f_1(4) = \frac{1}{2} + \ln 4 < 4$, $f_1{}'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{(x-2)^2} < \dfrac{1}{x} < 1$, la gráfica de f_1 queda por debajo de la diagonal principal $y = x$, ya que f_1 parte de un valor inferior en $x = 4$ y crece más despacio que la recta $y = x$. Y, por simetría, la gráfica de $f_1^{-1}(x)$ queda por encima de la diagonal principal. Así pues, la posición relativa de las tres será, aproximadamente, como la segunda figura.



(A)



(B)

(2) **Dada la función $y = f(x)$, definida de forma implícita mediante la ecuación $xe^{-y} + y^2 = 1$ en un entorno del punto $x = 1, y = 0$, se pide:**

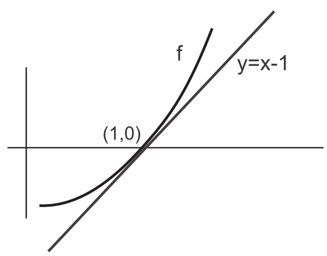
(a) Hallar la recta tangente y el polinomio de Taylor de grado 2 de la función centrado en $a = 1$.

(b) Representar la gráfica de f cerca del punto $x = 1$ y utilizar la recta tangente para obtener una aproximación de los valores de $f(1.1)$ y de $f(0.9)$.
¿Puedes justificar si alguna de dichas aproximaciones es por defecto o por exceso?
1 punto

---

a) En primer lugar, calculamos la derivada primera de la función:
$e^{-y} - xy'e^{-y} + 2yy' = e^{-y}(1 - xy') + 2yy' = 0$ sustituyendo $x = 1$, $y(1) = 0$ se deduce que $y'(1) = f'(1) = 1$.
Luego la ecuación de la recta tangente será: $y = P_1(x) = 0 + 1(x - 1)$, es decir, $y = x - 1$.
Análogamente, calculamos la derivada segunda de la función:
$-e^{-y}y'(1 - xy') + e^{-y}(-y' - xy") + 2y'y' + 2yy'' = 0$
sustituyendo $y(1) = 0, y'(1) = 1$ se deduce que $y''(1) = f''(1) = 1$
Luego la ecuación del polinomio de Taylor será: $y = P_2(x) = x - 1 + \frac{1}{2}(x - 1)^2$

b) Utilizando el polinomio de Taylor de orden 2, la gráfica de f será, aproximadamente como la figura:



Por otro lado, las aproximaciones de primer orden serán:
$f(1.1) \approx P_1(1.1) = 0.1$; $f(0.9) \approx P_1(0.9) = -0.1$
Como la función es convexa cerca de $x = 1$, pues $f''(1) > 0$, la aproximación de los valores de f por la recta tangente será, en ambos casos, por defecto.

(3) **Sea $C(x) = C_0 + 9x + 2x^2$ la función de costes y $p(x) = 81 - 4x$ la función inversa de demanda de una empresa monopolista, siendo $x \geqslant 0$ el número de unidades producidas de cierta mercancía. Se pide:**

(a) Determinar los costes fijos C_0 de modo que el beneficio máximo sea de 200 euros.

(b) Determinar los costes fijos C_0 de modo que el coste medio mínimo se alcance en $x = 3$.
¿Cuál es el valor de dicho coste medio mínimo?

0,5 puntos apartado a); 0,5 puntos apartado b)

---

a) En primer lugar, calculamos la función de beneficios.
$B(x) = (81 - 4x)x - (C_0 + 9x + 2x^2) = -6x^2 + 72x - C_0$
Si calculamos la primera y segunda derivada de B :
$B'(x) = -12x + 72; B''(x) = -12 < 0$
luego vemos que B tiene un único punto crítico en $x = \dfrac{72}{12} = 6$ y, como B es una función cóncava, este punto crítico es el único maximizador global.
Como $B(6) = 6(-36 + 72) - C_0 = 216 - C_0 = 200 \Longrightarrow C_0 = 16$

b) La función de costes medios es $C_m(x) = \dfrac{C(x)}{x} = \dfrac{C_0}{x} + 9 + 2x$.
Si calculamos sus dos primeras derivadas:
$C'_m(x) = \dfrac{-C_0}{x^2} + 2; C''_m(x) = 2\dfrac{C_0}{x^3} > 0$
observamos que $x = 3$ es el único punto crítico de la función $C_m(x)$ cuando $C_0 = 18$.
Y, como dicha función de costes medios es convexa, dicho punto crítico es el único minimizador global.
Por lo tanto, la producción que minimiza el coste medio será: $x = 3$.
Y, sustituyendo en la función de costes medios, el coste medio mínimo será:
$C_m(3) = \dfrac{18}{3} + 9 + 2.3 = 6 + 9 + 6 = 21$

(4) **Sea la función** $f(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{a}{(x-4)} & si\ x < 2 \\ a + \dfrac{b}{\sqrt{x+2}} & si\ \ x \geqslant 2 \end{cases}$ **definida a trozos en el intervalo** $[1, 7]$**. Se pide:**

(a) Determinar a y b para que $f(x)$ satisfaga las hipótesis (o condiciones iniciales) del teorema de Lagrange (o del valor medio) en dicho intervalo.

(b) Para aquellos valores a, b hallados en el apartado anterior, determinar, el valor o valores intermedio(s) c de forma que se cumpla la tesis (o conclusión) de dicho teorema.

Sugerencia para el apartado a: enunciar el teorema del valor medio.

Sugerencia para el apartado b: tomar $2,6$ como valor aproximado de $6/\sqrt{5}$, y considerar solo el caso $1 < c \leqslant 2$.

0,6 puntos apartado a); 0,4 puntos apartado b)

---

a) Necesitamos imponer la continuidad y derivabilidad en $x = 2$.
Para ello, como $\lim\limits_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = 1 - a/2$, $f(2) = \lim\limits_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = a + b/2$
se deduce que la función será continua en dicho punto cuando:
$1 - a/2 = a + b/2 \Longleftrightarrow 3a + b = 2$.
Por otro lado, suponiendo que la función sea continua en $x = 2$, será derivable en dicho punto si: $-a/4 = f\,'_-(2) = f\,'_+(2) = (-b/2)(1/8) \Longleftrightarrow 4a = b$.
Luego la función será continua y derivable en $x = 2$ cuando $a = 2/7, b = 8/7$.

b) Por el teorema del valor medio sabemos que:
(*) Existe $c \in (1, 7) : f(7) - f(1) = f\,'(c)(7 - 1)$.
Teniendo en cuenta que $a = 2/7, b = 8/7 \Longrightarrow$
$f(1) = 1 - a/3 = 19/21$, $f(7) = a + b/3 = 2/7 + 8/21 = 14/21$
luego (*) equivale a que $14/21 - 19/21 = -5/21 = 6f\,'(c)$. O bien: $f\,'(c) = (-5/7)(1/18)$.
Cuando $1 < x \leq 2$, entonces $f\,'(x) = -2/7(x - 4)^2$, luego
$f\,'(x) = -2/7(x - 4)^2 = (-5/7)(1/18) \Longleftrightarrow 36/5 = (x - 4)^2 \Longleftrightarrow \pm 2,6 = x - 4$
como no es posible que $2,6 = x - 4$, pues entonces $x = 6,6$ y $x \leq 2$,
entonces debe ser $-2,6 = x - 4$ lo que equivale a que $x = 1,4$.
Es decir, que Existe $c \in (1, 2) : f(7) - f(1) = f\,'(c)(7 - 1)$
.
La otra posibilidad es que $2 \leq x < 7$; entonces como $f\,'(x) = (-b/2)(x + 2)^{-3/2}$,
luego $f\,'(x) = (-5/7)(1/18)$ equivale a:
$(-4/7)(x + 2)^{-3/2} = (-5/7)(1/18) \Longleftrightarrow 72/5 = (x + 2)^{3/2} \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow (x + 2)^3 = 14,4^2 \in (14^2, 15^2) = (196, 225)$
Como $h(x) = (x + 2)^3$ cumple que $h(3) = 125, h(5) = 343$,
se deduce que Existe $c \in (3, 5) : (c + 2)^3 = 14,4^2$,
lo que equivale a que Existe $c \in (3, 5) : f(7) - f(1) = f\,'(c)(7 - 1)$

(5) **Dada la función $f : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = xe^{-x}$, se pide:**

(a) Representar aproximadamente el conjunto $A = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq f(x)\}$ y hallar, si existen, los maximales y minimales, máximo y mínimo de A.

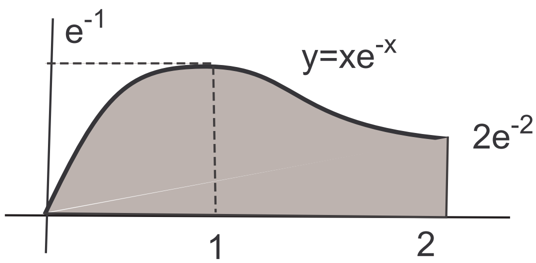
(b) Calcular el área del conjunto dado.

Sugerencia para a: el orden de Pareto viene dado por: $(x_0, y_0) \leq_P (x_1, y_1) \Longleftrightarrow x_0 \leq x_1, y_0 \leq y_1$.

0,6 puntos apartado a); 0,4 puntos apartado b)

---

a) Como $f'(x) = e^{-x}(1-x)$, eso significa que la función es creciente en el intervalo $[0,1]$ y decreciente en el intervalo $[1,2]$. Por lo tanto, el dibujo de A será, aproximadamente, así:



Por lo tanto, el orden de Pareto nos describe al conjunto así: máximo no existe, maximales$(A) = \{(x, f(x)) : 1 \leq x \leq 2\}$. mínimo$(A) = $ minimales$(A)\} = \{(0,0)\}$.

b) En primer lugar, hallamos la primitiva de la función integrando por partes:

$\int xe^{-x} = \int fg' = fg - \int f'g = x(-e^{-x}) - \int 1(-e^{-x}) = x(-e^{-x}) + \int e^{-x} = (x+1)(-e^{-x})$

Por tanto, aplicando la regla de Barrow, obtenemos que:

$\int_0^2 f(x)dx = [(x+1)(-e^{-x})]_0^2 = 3(-e^{-2}) - (-1) = 1 - 3e^{-2} =$ Área (A)

(6) **Dada la función $g(x) = x^2 - 4x + 3$, se pide:**

(a) Representar la región limitada por la gráfica de $g(x)$, la recta tangente a dicha función en el punto $x = 0$ y el eje horizontal.

(b) Sea ahora g una función convexa decreciente en el intervalo $[0, 1]$ y que pase por los puntos $(0, 3)$ y $(1, 0)$. Hallar las mejores aproximaciones, por exceso y por defecto, del área de la región definida en la parte a).

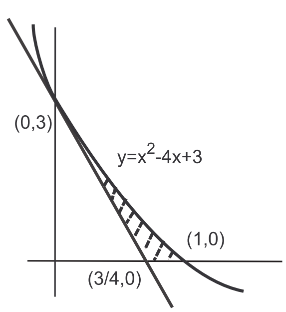
Sugerencia para b: para ambos casos dibujar la región anterior, en el caso de que la recta tangente corte al eje horizontal en cualquier punto del intervalo $(0, 1)$.

1 punto

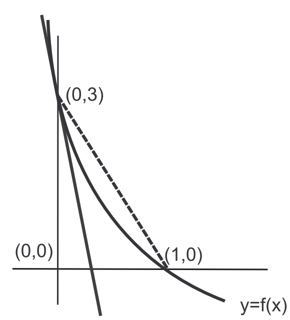
---

a) La recta tangente en $x = 0$ tiene como ecuación: $y - g(0) = g'(0)(x - 0)$, es decir, $y - 3 = (-4)x$, luego corta al eje horizontal, cuando $y = 0$, en el punto $x : 0 - 3 = -4x \Longleftrightarrow x = 3/4$.
Por otro lado, la función $g(x) = (x - 1)(x - 3)$ corta al eje horizontal en los puntos $x = 1, x = 3$.
Además, la función g es decreciente en el intervalo $[0, 1]$ (pues $g'(x) < 0$) y convexa (pues $g"(x) > 0$), luego la gráfica de g queda por encima de la recta tangente. Ver figura C.

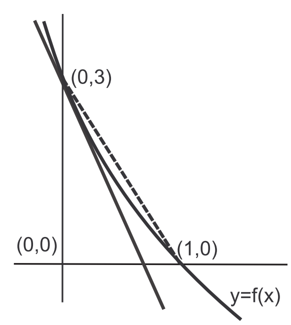
b) La mejor aproximación por exceso del valor de dicha área es $\frac{3}{2}$, pues dicho recinto siempre debe estar contenido en el triángulo T_+ de vértices (0,0), (0,3) y (1,0), debido a la convexidad de g.
Recíprocamente, la mejor aproximación por defecto del valor de dicha área es 0, pues dicho recinto puede estar encerrado en un triángulo T_- arbitrariamente pequeño de vértices: $(1 - \epsilon, 0), (1, 0)$ y $(0, 3)$. Las figuras D y E pueden ayudar a entender esas situaciones:



(C)



(D)



(E)