Universidad Carlos III de Madrid

Exercise	1	2	3	4	5	6	Total
Points							

Departamento de Economía **Matemáticas I Examen Final** **20 enero 2017**

Duración: 2 horas.

APELLIDOS:		**NOMBRE:**
ID:	**GRADO:**	**GRUPO:**

(1) **Sea la función $f(x) = \ln(|x| - 2) + 3$. Se pide:**

(a) Representar gráficamente la función, calculando previamente su dominio, simetrías y puntos de corte con los ejes, intervalos de crecimiento y decrecimiento, asíntotas e imagen de $f(x)$.

(b) Sea la función $f_1(x) = f(x)$, definida solo en el intervalo donde dicha función es creciente. Dibujar las gráficas de $f_1(x)$, su inversa y sus respectivas rectas tangentes en el punto $x = 3$, utilizando la concavidad y/o convexidad de $f_1(x)$ y de $f_1^{-1}(x)$.

Sugerencia: se puede hallar la expresión analítica de $f_1^{-1}(x)$, pero no es necesario.

0,6 puntos apartado a); 0,4 puntos apartado b)

---

a) El dominio de la función anterior es $\{x : |x| > 2\} = (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$.

Por otro lado, la función es par, luego su gráfica será simétrica respecto al eje de ordenadas. Por tanto, es suficiente estudiarla en el intervalo $(2, \infty)$.

La gráfica no tiene puntos de corte con el eje vertical, pues $x = 0$ no está en el dominio de la función. En cuanto al eje horizontal, si $x > 2$ su punto de corte será x: $\ln(x-2) = -3 \iff x - 2 = e^{-3} \iff x = 2 + e^{-3}$. Y, por simetría, si $x < -2$, el punto de corte será $x = -2 - e^{-3}$.

Además, como $f\,'(x) = \dfrac{1}{x-2}$ (si $x > 2$), se deduce que f es creciente en $(2, \infty)$ y, por simetría, decreciente en $(-\infty, -2)$.

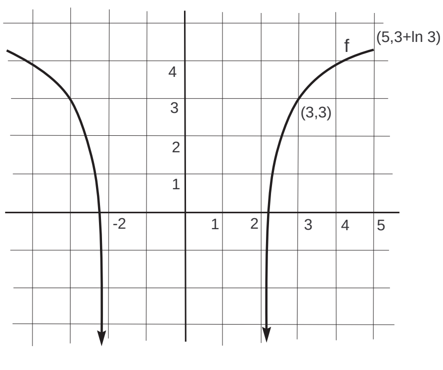
Como la función es continua en su dominio, solo hay que estudiar las posibles asíntotas verticales en 2^+ y en -2^- :

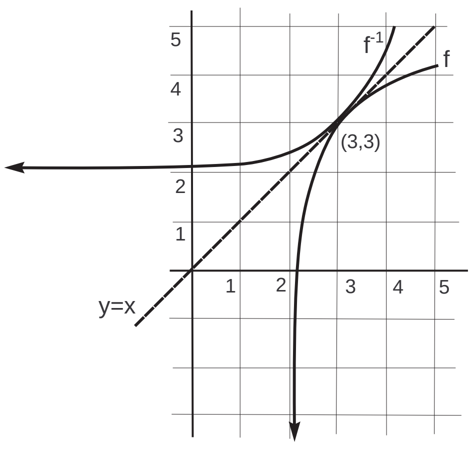
$\lim\limits_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = \ln(0^+) + 3 = -\infty + 3 = -\infty$; luego la función tiene asíntota vertical en $x = 2^+$ y, por simetría, en $x = -2^-$. Y, en cuanto a las asíntotas en $\pm\infty$, como:

$\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \infty$; $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$; luego la función no tiene asíntota horizontal ni oblicua en ∞ y, por simetría, tampoco en $-\infty$.

Por lo tanto, como $\lim\limits_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \infty$ y la función es continua en el intervalo $(2, \infty)$, por el teorema de los valores intermedios la imagen será $(-\infty, \infty)$.

Conclusión: la gráfica de f tendrá un apariencia, aproximadamente, como la primera figura:





b) Si $y = f_1^{-1}(x) > 2$, $f_1(y) = \ln(y-2) + 3 = x \iff \ln(y-2) = x - 3 \iff$

$\iff y - 2 = e^{x-3} \iff y = f_1^{-1}(x) = 2 + e^{x-3}$. Pero el problema se puede hacer sin haber calculado la expresión analítica de la inversa.

Como $f(3) = \ln(3-2)+3 = 3$, $f_1^{-1}(3) = 3$. Análogamente, como
$f\ '(x) = \dfrac{1}{x-2} \Longrightarrow f\ '(3) = 1 \Longrightarrow (f_1^{-1})'(3) = 1$, luego ambas funciones tienen la misma recta tangente $y-3 = x-3$ (o sea, $y = x$) en $x = 3$.
Por último,como f_1 es cóncava, pues $f"(x) = \dfrac{-1}{(x-2)^2} < 0$, y creciente, se deduce que $f_1^{-1}(x)$ es convexa y creciente.
Por lo tanto, la gráfica de f_1 quedará debajo de su recta tangente $y = x$, mientras que la gráfica de f_1^{-1}quedará encima de esa misma recta, intersecándose ambas gráficas en el punto $(3, 3)$.
La posición relativa de ambas funciones con su común recta tangente será, cerca del punto $x = 3$, aproximadamente como la segunda figura.

(2) **Dada la función** $y = f(x)$, **definida de forma implícita mediante la ecuación** $ye^x - y^2x + x = 1$ **en un entorno del punto** $x = 0, y = 1$, **se pide:**

(a) Hallar la recta tangente y el polinomio de Taylor de grado 2 de la función centrado en $a = 0$.

(b) Utilizar la recta tangente y el polinomio de Taylor para obtener una aproximación del valor de $f(0,1)$.

¿Puedes justificar si alguna de dichas aproximaciones es por defecto o por exceso?

0,5 puntos apartado a); 0,5 puntos apartado b)

---

a) En primer lugar, calculamos la derivada primera de la función:
$ye^x + y'e^x - 2yy'x - y^2 + 1 = 0$ sustituyendo $x = 0,\ y(0) = 1$ se deduce que
$y'(0) = f\ '(0) = -1$.
Análogamente, calculamos la derivada segunda de la función:
$(y" + 2y' + y)e^x - 2(y')^2x - 2yy"x - 4yy' = 0$
sustituyendo $y(0) = 1, y'(0) = -1$ se deduce que $y"(0) = f\ "(0) = -3$
Luego la ecuación de la recta tangente será: $y = P_1(x) = 1 + (-1)(x - 0)$, es decir, $y = 1 - x$.
Y la ecuación del polinomio de Taylor será: $y = P_2(x) = 1 - x - \frac{3}{2}x^2$
.

b) Aproximación de primer orden: $f(0,1) \approx P_1(0,1) = 0,9$.
Aproximación de segundo orden: $f(0,1) \approx P_2(0,1) = 0,885$.
Como la función es cóncava cerca de $x = 0$, pues $f"(0) < 0$, la aproximación por la recta tangente es por exceso, no pudiendo afirmarse nada sobre la aproximación de segundo orden.

(3) **Sea $C(x) = 72 + 9x + 2x^2$ la función de costes y $p(x) = 81 - ax$ la función inversa de demanda de una empresa monopolista, siendo $x \geqslant 0$ el número de unidades producidas de cierta mercancía y $a > 0$. Se pide:**

(a) Determinar la producción que maximiza el beneficio.

(b) Determinar el coste medio mínimo, hallando primero la producción que minimiza el coste medio.

0,5 puntos apartado a); 0,5 puntos apartado b)

---

a) En primer lugar, calculamos la función de beneficios.
$B(x) = (81 - ax)x - (72 + 9x + 2x^2) = (-a - 2)x^2 + 72x - 72$
Si calculamos la primera y segunda derivada de B :
$B'(x) = (-a - 2)2x + 72; B''(x) = (-a - 2)2 < 0$
luego vemos que B tiene un único punto crítico en $x = \dfrac{36}{(a + 2)}$ y, como B es una función cóncava, este punto crítico es el único maximizador global.

b) La función de costes es $C_m(x) = \dfrac{C(x)}{x} = \dfrac{72}{x} + 9 + 2x$.
Si calculamos su dos primeras derivadas:
$C'_m(x) = \dfrac{-72}{x^2} + 2; C''_m(x) = 2\dfrac{72}{x^3} > 0$
observamos que $x = 6$ es el único punto crítico de la función $C_m(x)$, y como dicha función es convexa, dicho punto crítico es el único minimizador global.
Por lo tanto, la producción que minimiza el coste medio será: $x = 6$.
Y, sustituyendo en la función de costes medios, el coste medio mínimo será:
$C_m(6) = \dfrac{72}{6} + 9 + 2.6 = 12 + 9 + 12 = 33$

(4) **Sea la función** $f(x) = \begin{cases} ax+3 & si\ x<1 \\ -x^2+2ax+b & si\ \ x\geqslant 1 \end{cases}$ **y consideremos el intervalo** $[-1,3]$ **. Se pide:**

(a) Determinar a y b para que $f(x)$ satisfaga las hipótesis (o condiciones iniciales) del teorema de Lagrange (o del valor medio) en dicho intervalo.

(b) Para aquellos valores a, b determinar, el valor o valores intermedio(s) c de forma que se cumpla la tesis (o conclusión) de dicho teorema.

Sugerencia para ambos apartados: enunciar el teorema del valor medio.

0,6 puntos apartado a); 0,4 puntos apartado b)

---

a) Necesitamos imponer la continuidad y derivabilidad en $x = 1$.
Para ello, como $\lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = a+3,\ f(1) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = -1+2a+b$
se deduce que la función será continua en dicho punto cuando:
$a+3 = -1+2a+b \Longleftrightarrow a+b = 4$.
Por otro lado, suponiendo que la función sea continua en $x = 1$, será derivable en dicho punto si: $a = f\ '_-(1) = f\ '_+(1) = -2+2a \Longleftrightarrow a = 2$.
Luego la función será continua y derivable en $x = 1$ cuando $a = b = 2$.

b) Por el teorema del valor medio sabemos que:
Existe $c \in (-1,3) : f(3) - f(-1) = f\ '(c)(3-(-1))$.
Teniendo en cuenta que $a = b = 2$, lo anterior equivale a que $(-9+12+2)-(-2+3) = 4f'(c)$. O bien: $f'(c) = 1$.
Cuando $x \leq 1, f\ '(x) = 2 \neq 1$, luego no es posible que $c \leq 1$.
Cuando $x > 1, f\ '(x) = -2x+4 = 1 \Longleftrightarrow x = \frac{3}{2}$.
Luego solo es posible cuando $c = \frac{3}{2}$.

(5) **Dada una función** $f : [0,3] \longrightarrow \mathbb{R}$ **continua, cóncava y que cumpla:** $f(0) = 2,\ f(1) = 3,\ f(3) = 0,\ f\,'(1) = 0$. **Se pide:**

(a) Representar aproximadamente el conjunto $A = \{(x,y) : 0 \le x \le 3, 0 \le y \le f(x)\}$ y hallar, si existen, los maximales y minimales, máximo y mínimo de A.

(b) Calcular la mejor aproximación inferior (o por defecto) del área del conjunto dado.

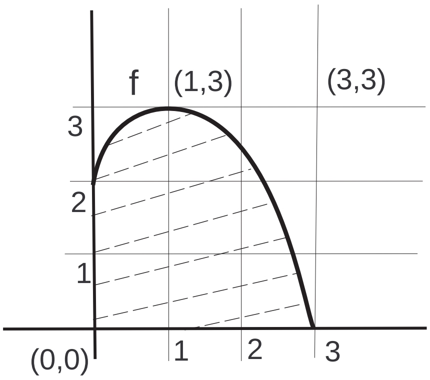
Sugerencia para a: el orden de Pareto viene dado por: $(x_0, y_0) \le_P (x_1, y_1) \Longleftrightarrow x_0 \le x_1, y_0 \le y_1$.

Sugerencia para b: considerar los segmentos que unen los puntos $(0,2), (1,3)$ y $(3,0)$.

0,6 puntos apartado a); 0,4 puntos apartado b)

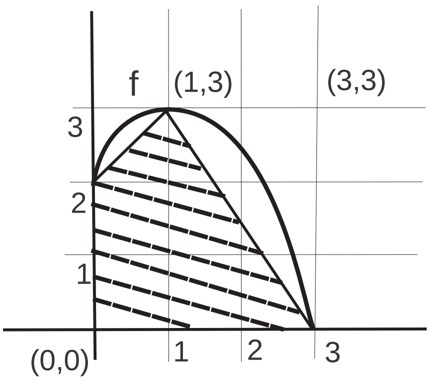
---

a) Como $f(x)$ es cóncava y $f\,'(1) = 0$, eso significa que la función es creciente en el intervalo $[0,1]$ y decreciente en el intervalo $[1,3]$. Por lo tanto, el dibujo de A será, aproximadamente, así:



Por lo tanto, el orden de Pareto nos describe al conjunto así:
máximo no existe, maximales$(A) = \{(x, f(x)) : 1 \le x \le 3\}$.
mínimo$(A) =$ minimales$(A)\} = \{(0,0)\}$.

b) Como la función es cóncava, el segmento $h_1(x)$ que une los puntos $(0,2)$ y $(1,3)$ queda por debajo de la gráfica de la función, como indica la figura



Luego como $h_1(x) = 2 + x$, se deduce que:
$\int_0^1 h_1(x)dx = \frac{5}{2} \le \int_0^1 f(x)dx$
Análogamente, el segmento $h_2(x)$ que une los puntos $(1,3)$ y $(3,0)$ queda también por debajo de la gráfica de la función. Luego como $h_2(x) = (\frac{-3}{2})(x-3)$, se deduce que:
$\int_1^2 h_2(x)dx = 3 \le \int_1^2 f(x)dx$
Luego $\frac{5}{2} + 3 = \frac{11}{2} \le$ Área (A)

(6) **Dada la función** $h(x) = \dfrac{\ln x}{x^3}$, **si** $x > 0$, **se pide:**

(a) Hallar la primitiva de $h(x)$ que tome el valor 1 en $x = 1$.

(b) Sea g continua tal que $h(x) \leq g(x) \leq 2h(x)$ si $x \geqslant 1$ y $G(x) = \int_1^x g(t)dt$.

Hallar la mejor aproximación posible de L, siendo $y = L$ la asíntota horizontal de $G(x)$.

Sugerencia para b: en primer lugar, probar la existencia de L y calcularlo aproximadamente, suponiendo que $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \int_1^x h(t)dt = \frac{1}{4}$ y probando/utilizando la monotonía de $G(x)$.

En segundo lugar, comprobar que $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \int_1^x h(t)dt = \frac{1}{4}$

0,5 puntos apartado a); 0,5 puntos apartado b)

---

a) Sea $H(x) = \int \dfrac{\ln x}{x^3} dx$ la primitiva indefinida de $h(x)$.

Integrando por partes, llamando $f'(x) = x^{-3}, g(x) = \ln x$, se obtiene que:

$\int x^{-3} \ln x dx = \dfrac{x^{-2}}{-2} \ln x - \int \dfrac{x^{-2}}{-2} x^{-1} dx = \dfrac{x^{-2}}{-2} \ln x + \frac{1}{2} \int x^{-3} dx =$

$= \dfrac{x^{-2}}{-2} \ln x + \frac{1}{2}(\dfrac{x^{-2}}{-2}) + C = (\frac{-1}{4})x^{-2}(2\ln x + 1) + C$

Y ahora, como $H_1(1) = \frac{-1}{4} + C = 1 \Longrightarrow C = \frac{5}{4}$.

Por lo tanto, $H_1(x) = (\frac{-1}{4})x^{-2}(2\ln x + 1) + \frac{5}{4}$.

.

b) Como $\int_1^x h(t)dt \leq \int_1^x g(t)dt \leq 2\int_1^x h(t)$, y como $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \int_1^x h(t)dt = \frac{1}{4}$,

se deduce que $L = \lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \int_1^x g(t)dt$, si existe, cumplirá que $\frac{1}{4} \leq L \leq \frac{1}{2}$.

Luego $L = \frac{3}{8}$ será la mejor aproximación, con un error máximo de $\frac{1}{8}$.

Por otro lado, como $G(x) = \int_1^x g(t)dt$ es creciente, pues su derivada, $g(x)$, es positiva,

y además $G(x)$ está acotada superiormente, se deduce que existe $L = \lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \int_1^x g(t)dt$.

Para probar la sugerencia, como $H_2(x) = \int_1^x h(t)dt$ es la primitiva de $h(x)$ que toma el valor 0 en $x = 1$, entonces dicha primitiva solo se diferencia de la otra primitiva $H(x)$ obtenida en el apartado anterior en una unidad.

Así pues, $H_2(x) = (\frac{-1}{4})x^{-2}(2\ln x + 1) + \frac{1}{4}$. Y ahora, $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \int_1^x h(t)dt =$

$= \lim\limits_{x\longrightarrow\infty} H_2(x) = \frac{1}{4} + (\frac{-1}{4}) \lim\limits_{x\longrightarrow\infty} (2\ln x + 1)/x^2$ =(aplicando la regla de L'Hopital)=

$= \frac{1}{4} + (\frac{-1}{4}) \lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{2/x}{2x} = \frac{1}{4}$.

Las siguientes gráficas de $g(x)$ y $G(x)$ pueden ayudar a entender la situación: